

LOS LÍMITES DE LA REGLA DE CÁLCULO FABER CASTELL 2/82N

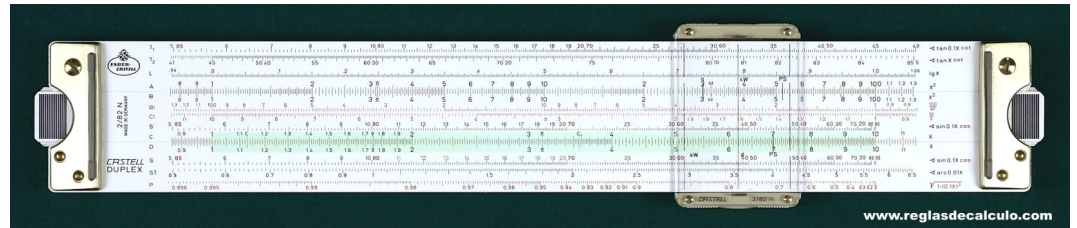


Imagen de una regla de cálculo FC 2/82 N.
Autor: Jorge Fábregas www.reglasdecalculo.com



Pablo Serrano.
Noviembre de 2023.

Los límites de la regla de cálculo Faber Castell

2/82 N.

“Es indigno de hombres excelentes desperdiciar las horas como esclavos en la labor de calcular lo que sin riesgo podría relegarse a alguien más si se utilizaran máquinas”. Gottfried Leibniz (1646-1716).

Índice

1. Introducción.	2
2. A vueltas con los números complejos.	3
2.1. Números complejos con $0,09 < \tan \theta' < 0,1$	7
2.2. Números complejos con $70^\circ < \theta' < 85^\circ$	7
2.3. Números complejos con $\theta' < 5^\circ$ o con $\theta' > 85^\circ$	8
3. Cálculos con potencias un poco raras.	10
4. ¿Cuándo es mejor usar 10^x que e^x?	13
5. Manejando factoriales.	17
6. Algo sobre combinatoria.	19
7. Conclusiones.	20

1. Introducción.

Desde que adquirí mi regla de cálculo me ha interesado mucho saber cuáles son sus límites prácticos como calculadora científica, es decir, qué se puede calcular con una precisión aceptable.

Por poner las cosas en su contexto, paso a describir brevemente la regla de cálculo FC 2/82 N, aunque creo que es bastante conocida. Se trata de una regla de 25 cm de escala principal, tipo dúplex y que cuenta con todas las escalas habituales en este tipo de reglas, es decir, A, B, BI, C, CI, CF, D, DF, K, K', L, LL1, LL2, LL3; LL01, LL02, LL03, P, S, S', ST, T1 y T2; es decir, es una regla bastante completa sin llegar a ser una “big gun”, como su hermana mayor la 2/83 N.

En cuanto cayó en mis manos la regla y supe manejarla con cierta soltura, me planteé torturarla un poco, llevándola al límite con problemas no tan habituales con algunas dificultades numéricas para ver cómo respondía y a eso he estado dedicado en mis ratos libres un par de meses hasta que obtenido una serie de conclusiones que quería compartir con aquellos que estén interesados en cuestiones matemáticas un poco fuera de lo habitual. Paso a contar lo que he estado haciendo para al final extraer algunas conclusiones.

2. A vueltas con los números complejos.

Uno de las capacidades que más me han sorprendido de la regla de cálculo es la facilidad para la aritmética compleja, no me lo esperaba en absoluto, pero es realmente fácil. La clave es realizar la conversión entre las formas cartesiana y polar de forma rápida y eficiente. Para ello el método que propone el manual de uso de la regla de cálculo editado por Faber Castell me parece genial. Se basa simplemente en considerar que si un número complejo se puede escribir de la forma:

$$z = a + bj = r\angle\theta \rightarrow \begin{cases} \tan \theta = \frac{b}{a} \\ \sin \theta = \frac{b}{r} \end{cases} \quad (1)$$

Por tanto ¹:

1. Si el número complejo se da en forma cartesiana y se quiere obtener su forma polar, situamos b en la escala D, alineamos el 10 de la escala CI con el cursor, buscamos en la escala CI el valor de a y mirando en la correspondiente escala de tangentes tenemos el valor de θ ; para ello tenemos que saber previamente si θ es mayor o menor que 45° . Bueno, en realidad estamos buscando un ángulo del primer cuadrante que a partir de ahora denominaré como θ' , pero de cuenta del calculista corre saber en qué cuadrante está realmente el ángulo polar, esto se verá en los ejemplos de forma evidente. Con este ángulo θ' , nos queda buscar en la escala de senos S, y alineado con el mismo, en la escala CI tenemos el módulo del número complejo. Todo lo que hemos hecho son las dos operaciones reflejadas anteriormente, pero al hacer las divisiones como productos por el inverso solamente hay que posicionar la regleta una vez.
2. Si el número complejo se da en forma polar y se quiere obtener en forma cartesiana, solamente hay que hacer lo inverso, es decir, situar θ' en la escala de senos, alinear este ángulo con el módulo en la escala CI, donde esté el 10 de la misma, alineado en la escala D se encuentra b y entrando en la escala de tangentes, alineado con el ángulo en la escala CI se encuentra a .

Antes de empezar con los ejemplos hay que hacer una consideración respecto del ángulo polar o argumento. En este sentido, el criterio de denominación de los ángulos que se prefiere en matemáticas no es el del intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$ como pudiera pensarse sino que es mejor el de $(-180^\circ, 180^\circ]$. Esto no es ningún capricho sino que tiene que ver con que el argumento complejo es multievaluado (es decir, se puede coger un ángulo o el mismo sumándole o restándole 360° las veces que se quiera), con lo que hay que coger solamente una vuelta, que se denomina argumento principal. Se prefiere coger la vuelta que va desde -180° hasta 180° porque así el denominado corte de ramificación (donde se superponen las distintas vueltas) corresponde con el eje real negativo, no con el positivo como pasaría si tomáramos el argumento principal entre 0° y 360° . Expresado matemáticamente, el argumento principal de un número complejo es:

¹Como casi todos los ingenieros, escribo la unidad imaginaria como j , en lugar de i .

$$\text{Arg}(z) = \theta = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a}; & a \geq 0 \\ \arctan \frac{b}{a} + \text{sgn}(b) \cdot 180^\circ; & a < 0 \end{cases} \quad (2)$$

La función $\text{sgn}(b)$ significa signo de b ; si $b \geq 0$ vale 1 y se suma 180° al arcotangente; si $b < 0$, vale -1 y se resta 180° al arcotangente, ya que el arcotangente definido como función matemática tiene que ser monoevaluada y por tanto da valores dentro del intervalo $[-90^\circ, 90^\circ]$, como se puede comprobar con cualquier calculadora en la mano, por tanto con esta definición del argumento principal obtendremos el valor en el cuadrante correcto dado $z = a + bj$. Obsérvese que con esta definición, el argumento para los reales positivos es 0° mientras que para los reales negativos es 180° .²

Con estas consideraciones previas, que realmente no son tan complicadas, es un método rapidísimo, que practicándolo unas cuantas veces se domina como si tal cosa. Y entonces, el desafío ¿dónde está?, pues en plantear cálculos que requieran pasar entre ambas formas reiteradas veces para comprobar qué pasa con la precisión. Pondré dos ejemplos para que se entienda lo que quiero decir.

Ejemplo. Calcular la expresión $\left(\frac{(7 - 3j) \times (-3 + 2j)}{-2 - 4j} \right)^{\frac{1}{3}}$. Dar el resultado en forma polar y cartesiana.

Es evidente que tendremos que pasar los tres números complejos a polares, operar para obtener el resultado y volver a convertir a cartesianas para completar la respuesta. O sea, unas cuantas conversiones y operaciones.

Lo primero es tener claro en cuál de las dos escalas de tangente miraremos y en qué cuadrante está cada número complejo en cada caso.

- $7 - 3j$ tendrá un valor de $\theta' < 45^\circ$; mientras que $-90^\circ < \theta < 0^\circ$, es decir, está en el cuarto cuadrante.
- $-3 + 2j$ tendrá un valor de $\theta' < 45^\circ$; mientras que $0^\circ < \theta < 180^\circ$, es decir, está en el segundo cuadrante.
- $-2 - 4j$ tendrá un valor de $\theta' > 45^\circ$; mientras que $-180^\circ < \theta < -90^\circ$, es decir, está en el tercer cuadrante.

Con estas consideraciones previas y siguiendo el método descrito tenemos que:

²Todo esto que puede parecer artificialmente rebuscado es básico para mantener la coherencia usando funciones de variable compleja. Este es el criterio de cualquier libro de matemáticas que trate la variable compleja, así como el de cualquier calculadora u hoja de cálculo que opere con números complejos. Dicho lo anterior, hay multitud de libros no estrictamente matemáticos donde se trabaja con números complejos, como por ejemplo el citado manual de uso de la regla editado por Faber Castell donde se sigue el criterio de que el argumento principal esté en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ]$; no pasa nada siempre que se sea coherente, es decir, lo que no se puede es mezclar ambos criterios y trabajar a la vez con argumentos de 250° y de -65° , porque entonces llegamos a resultados absurdos y erróneos. Dicho esto yo me quedo con el criterio aceptado por la generalidad de los matemáticos. Como detalle, cuando nos referimos al argumento principal se suele escribir $\text{Arg}(z)$ mientras que cuando escribimos $\text{arg}(z)$ no estamos especificando la vuelta concreta a la que nos referimos.

$$\left(\frac{(7-3j) \times (-3+2j)}{-2-4j} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{7,55\angle -23,2^\circ \times 3,7\angle 146,3^\circ}{4,47\angle -116,5^\circ} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3)$$

Ahora ya solamente queda operar como es usual con complejos en forma polar, es decir, para multiplicar se multiplican los módulos y se suman los argumentos, para dividir se dividen los módulos y se restan los argumentos y para hacer una raíz se hace la raíz del módulo y el argumento se divide por el orden de la raíz. Multiplicar, dividir y hacer una raíz cúbica son operaciones elementales con la regla de cálculo y no merecen más comentario, por tanto, el resultado es:

$$\left(\frac{7,55\angle -23,2^\circ \times 3,7\angle 146,3^\circ}{4,47\angle -116,5^\circ} \right)^{\frac{1}{3}} = (6,25\angle -120,4^\circ)^{\frac{1}{3}} = 1,84\angle -40,1^\circ \quad (4)$$

Hay que destacar que cuando hacemos las sumas y restas de argumentos antes de hacer la raíz cúbica obtenemos $239,6^\circ$, que transformamos en $\angle -120,4^\circ$ para ser coherentes con el criterio del argumento principal manejado, ya que si no, habríamos saltado de vuelta y el resultado al dividir por 3 no sería correcto, porque habríamos mezclado argumentos de distintas vueltas. A esto es a lo que me refería antes con que hay que ser coherentes con el criterio adoptado para el argumento principal. Esto es fuente de múltiples “tragedias” al manejar la variable compleja y es fundamental tenerlo claro, siempre hay que moverse en la misma vuelta que hayamos especificado como argumento principal,³ si no, pasan cosas muy raras como esta, o como que no valen las propiedades de los logaritmos, por ejemplo.

Ya solamente queda hacer el procedimiento inverso para obtener el resultado en coordenadas cartesianas y tenemos:

$$1,84\angle -40,1^\circ = 1,42 - 1,19j \quad (5)$$

Obviamente hay que fijarse en que como el argumento es $-40,1^\circ$ el número está en el cuarto cuadrante, lo que impone los signos de cada componente cartesiana.

¿Y qué nos sale con una calculadora? Pues usando mi calculadora, una HP 50 G que afortunadamente trabaja con números complejos como si nada, el resultado se obtiene en un momentito y resulta ser:

$$1,83\angle -40,1^\circ = 1,40 - 1,18j \quad (6)$$

No sé vosotros lo que pensáis, pero para mí es un resultado más que satisfactorio, teniendo en cuenta la cantidad y complejidad de operaciones implicadas.

³Si a alguien le interesa profundizar en esto de la aritmética compleja, le recomendaría cualquier libro clásico de funciones de variable compleja como el Markusevich y ahí descubrirá las sutilezas de las superficies de Riemann.

Por último, para ser absolutamente precisos hay que decir que por la fórmula de De Moivre, la raíz enésima de un número complejo tiene n valores del mismo módulo, desfasados entre sí $\frac{360^\circ}{n}$. En el caso que nos ocupa, al ser la raíz cúbica, hay 3 valores de módulo 1,84 desfasados 120° entre sí, que forman los vértices de un triángulo equilátero. O sea:

$$(6,25\angle -120,4^\circ)^{\frac{1}{3}} = \begin{cases} 1,84\angle -40,1^\circ \\ 1,84\angle 79,9^\circ \\ 1,84\angle -160,1^\circ \end{cases} \quad (7)$$

Ejemplo. Calcular la expresión $\left(\frac{4,2\angle 61,2^\circ + 2,7\angle -37,8^\circ}{2-3j}\right)^{\frac{1}{5}}$. Dar el resultado en forma cartesiana y polar.

Aquí complicamos un poquito más la cosa, para sumar hay que pasar a forma cartesiana, después esta suma pasarla a polares, hacer la división y hacer la raíz quinta, para finalmente volver a pasar el resultado a cartesianas. Voy directamente a los resultados no sin antes volver a recordar que hay que fijarse en qué escala de tangentes hay que mirar y en qué cuadrante está cada número complejo, por lo demás, los procedimientos son los ya descritos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4,2\angle 61,2^\circ + 2,7\angle -37,8^\circ}{2-3j}\right)^{\frac{1}{5}} &= \left(\frac{2,02 + 3,68j + 2,13 - 1,65j}{2-3j}\right)^{\frac{1}{5}} = \\ &= \left(\frac{4,63\angle 26^\circ}{3,62\angle -56,3^\circ}\right)^{\frac{1}{5}} = (1,275\angle 82,3^\circ)^{\frac{1}{5}} = 1,05\angle 16,5^\circ = 1 + 0,294j \quad (8) \end{aligned}$$

Aquí solamente hay que añadir que para hacer la raíz quinta se recurre a la escala LL2 de la regla como ya sabemos:

$$\sqrt[5]{1,275} = e^{\frac{1}{5} \cdot \ln 1,275} = 1,05 \quad (9)$$

Como antes, los 5 valores de la raíz quinta son (en polares, paso de hacerlo en cartesianas):

$$(1,275\angle 82,3^\circ)^{\frac{1}{5}} = \begin{cases} 1,05\angle 16,5^\circ \\ 1,05\angle 88,5^\circ \\ 1,05\angle 160,5^\circ \\ 1,05\angle -55,5^\circ \\ 1,05\angle -127,5^\circ \end{cases} \quad (10)$$

La calculadora me da el siguiente resultado:

$$1,05\angle 16,5^\circ = 1 + 0,298j \quad (11)$$

En este caso los resultados son todavía mejores, incluso teniendo más cálculos de por medio.

No quiero extenderme con más ejemplos, pero he hecho bastantes cálculos de este tipo y en general los resultados han sido bastante buenos. Y entonces, ¿cuándo las cosas no son automáticas con este método? Pues he detectado tres situaciones en las que hay que tener cuidado con este método, dos solventables y la otra no tanto.

2.1. Números complejos con $0,09 < \tan \theta' < 0,1$.

Las escalas T están previstas para valores $0,1 < \tan \theta' < 10$. Para valores menores nos tenemos que ir a la escala ST y estaríamos en el último caso que analizaremos, pero..., hay un ligero solape entre ambas escalas donde todavía se pueden usar las escalas T y S y dar resultados con cierta precisión, este intervalo es precisamente $0,09 < \tan \theta' < 0,1$. Si ése es el caso, todavía podemos usar el método anterior pero con precaución de no equivocarnos. Me explico con un ejemplo.

Ejemplo. *Pasar a forma polar el número complejo $z = 33 + 3j$*

Si vamos rápido y no nos fijamos, puede que creamos que el ángulo polar es de $42,2^\circ$ porque es que se alinea en la escala de tangentes menores de 45° con la componente a en la escala CI, una vez situado el 10 de esta última alineado con la componente b en la escala D. Pero hay que leer bien y entender mejor. La escala está rotulada como $\angle \tan 0,1x$, y si vemos lo que tenemos en la escala D es $x = 9,1$, lo que significa que $0,1x = 0,91$ y no $0,091$ como debería haber sido. ¡Ay, los decimales, lo traicioneros que son usando la regla de cálculo! A nada que lo hubiésemos pensado un momento habríamos descubierto que es imposible que el ángulo polar sea de $42,2^\circ$ cuando la componente real es más de 10 veces la imaginaria. Así que, realmente habría que haber alineado con b no el 10 de la escala CI, sino el 1. Si lo hacemos así, podemos usar el ligero solape de las escalas T y S para resolver como antes tenemos:

$$33 + 3j = 33,2 \angle 5,2^\circ \quad (12)$$

La calculadora me da un resultado de $33,1 \angle 5,2^\circ$, por tanto el cálculo con la regla es aceptable.

2.2. Números complejos con $70^\circ < \theta' < 85^\circ$.

Cuando el número complejo que vayamos a convertir tenga un argumento reducido al primer cuadrante $70^\circ < \theta' < 85^\circ$ va a medirse con poca resolución en la escala de senos, así que si partimos de la forma cartesiana nos dará poca precisión con el módulo y si partimos de la forma polar tendremos poca precisión al obtener las componentes cartesianas. En este caso es mejor recurrir al coseno y a la cotangente ya que:

$$z = a + bj = r \angle \theta \rightarrow \begin{cases} \cot \theta = a/b \\ \cos \theta = a/r \end{cases} \quad (13)$$

Ejemplo. Pasar a forma polar el número complejo $z = 1,3 + 9j$

Si intentamos en este caso el método explicado al principio vemos que manejamos un ángulo mayor de 80° , que nos va a dar poca precisión al calcular el módulo. Por ello, simplemente situamos a en la escala D, alineamos el 10, buscamos en CI el valor de B y en la escala T1 de cotangente (marca roja, escala inversa) leemos el valor de $81,8^\circ$. Llevamos este valor a la escala S buscando el coseno (marca roja, escala inversa) y tenemos en la escala CI un módulo $r = 9,15$, es decir:

$$1,3 + 9j = 9,15 \angle 81,8^\circ \quad (14)$$

La calculadora me da un valor de $9,09 \angle 81,8^\circ$, por tanto considero aceptable el cálculo con la regla.

Ejemplo. Pasar a forma cartesiana el número complejo $z = 3,5 \angle 74^\circ$

Haciendo el procedimiento inverso, buscamos en la escala de cosenos 74° , alineo con este valor en la escala CI el módulo 3,5, y bajo el 10 de esta escala, en la D, tengo el valor $a = 0,965$ y en la escala de cotangente busco 74° , alineado con este valor en CI tenemos $b = 3,38$ y así tenemos:

$$3,5 \angle 74^\circ = 0,965 + 3,38j \quad (15)$$

La calculadora me da un resultado de $0,965 + 3,36j$, luego el resultado con la regla es bastante bueno, la verdad.

2.3. Números complejos con $\theta' < 5^\circ$ o con $\theta' > 85^\circ$.

En estos casos estamos ante números complejos que son o casi reales o casi imaginarios puros y los métodos descritos anteriormente sencillamente dejan de valer puesto que las escalas S y T se refunden en la ST (para senos y tangentes o para cosenos y cotangentes, da igual), lo que en la práctica viene a significar que la regla no tiene precisión para distinguir entre el módulo del complejo y la mayor de sus componentes cartesianas.

Ejemplo. Pasar a forma cartesiana el número complejo $z = 3,5 \angle 3^\circ$

Recurrir al método tradicional, para ello miramos en la escala ST y tenemos $\sin 3^\circ = 0,0525$. Para el coseno no tenemos escala, pero sí podemos recurrir al primer término de su serie de Taylor, sabiendo como sabemos al mirar en la escala ST que $3^\circ = 0,0525$ rad, por lo que $\cos 0,0525 \approx 1 - \frac{0,0525^2}{2} = 1 - 0,00138 = 0,9986$. Por tanto:

$$\begin{cases} a = 3,5 \cos 3^\circ \approx 3,5 \\ b = 3,5 \sin 3^\circ = 0,184 \end{cases} \quad (16)$$

Como cualquiera puede entender, no hay regla en el mundo, ni mano de calculista que pueda distinguir entre 1 y 0,9986; así que lo que podemos decir de

este número complejo es que su componente real es casi casi 3,5 y su componente imaginaria es 0,184, esta última sé es calculada con algo de precisión. La calculadora, que no tiene estos problemas de precisión nos dice que:

$$3,5\angle 3^\circ = 3,495 + 0,183j \quad (17)$$

Lo mismo pero al contrario nos pasaría si intentásemos pasar a cartesianas el número $z = 4,8\angle 88^\circ$.

Simplemente, en ambos casos necesitamos más cifras significativas de las que da una regla de cálculo. Esta es una de las razones por las que en los tiempos de las reglas de cálculo, los astrónomos, topógrafos y otros necesitaban recurrir a tablas trigonométricas y de logaritmos con muchas, muchas cifras significativas, porque era normal que manejaran ángulos muy “cabroncetes”.

3. Cálculos con potencias un poco raras.

Es algo habitual en la práctica de cualquier ingeniería recurrir a correlaciones experimentales que suelen tener expresiones basadas en productos y divisiones de factores elevados a exponentes un poco raros, algunos de ellos, a su vez con una dependencia funcional rara también. Todo este tipo de correlaciones surgen del denominado análisis dimensional al intentar proponer ecuaciones experimentales para modelos que no se pueden resolver analíticamente, basados en el análisis de soluciones analíticas más simples. Esto es muy habitual en campos como la mecánica de fluidos, la transferencia del calor y otros muchos.

Todo este rollo previo me sirve para explicar por qué me ha dado por plantearme cálculos que no están basados en ninguna de estas ecuaciones experimentales o correlaciones que yo conozca, pero sí están “libremente” inspirados en las mismas.

Se trata pues en este apartado de mezclar en la misma cuenta, productos, divisiones, razones trigonométricas, logaritmos de variado pelaje, potencias con exponentes un poco locos y ese tipo de cosas, para encadenar errores de redondeo un poco puneteros y ver qué pasa.

Ejemplo. Calcular la expresión $\left(\frac{3,28 \cdot 12\,600 \cdot 0,034}{\cos 0,4 \cdot \sqrt{215} \cdot 47} \right)^{\log_5 \sqrt[3]{\sinh 1,38}}$

Lo primero una aclaración, cuando en una razón trigonométrica no se especifican unidades, está expresada en radianes, ya que el radián en realidad no tiene dimensiones puesto que su definición es en función de una relación geométrica. Es inmediato mirando en la escala ST establecer que $0,4 \text{ rad} = 23^\circ$. Hay que decir que usaremos la escala móvil S' (con la precaución de mirar en la escala roja, que estamos usando un coseno, no un seno) y así no hay que apuntar resultados intermedios; igualmente para la raíz cuadrada usaremos la escala B.

Lo siguiente es estimar el orden de magnitud de lo que hay dentro del paréntesis. No me extiendo sobre esto porque es manejo básico de la regla de cálculo, sólo diría que $\cos 0,4$ lo estimo cerca de 1 porque es un ángulo pequeño y que $\sqrt{215}$ lo estimo cerca de 14, ya que $\sqrt{2} = 1,41$; con todo esto y teniendo en cuenta las distintas potencias de 10, yo estimo que lo que hay dentro del paréntesis vale aproximadamente $\frac{12}{6} = 2$, con eso es suficiente.

El cálculo de lo que hay dentro del paréntesis no tiene entonces mayor dificultad que hacer las divisiones y productos en el orden adecuado, o sea, en zig-zag empezando por la primera división para no tener que apuntar resultados intermedios y aprovechando que en las escalas móviles tenemos S' y B, como ya hemos dicho. Así el resultado del paréntesis me da:

$$\left(\frac{3,28 \cdot 12\,600 \cdot 0,034}{\cos 0,4 \cdot \sqrt{215} \cdot 47} \right) = 2,22 \quad (18)$$

Hay que decir que no es habitual acercarse tanto con la estimación al resultado real, ni falta que hace, lo que importa es estimar bien el orden de magnitud.

Para el cálculo del seno hiperbólico simplemente situamos 1,38 en la escala D, y miramos los valores de $e^x = 3,97$ y $e^{-x} = 0,25$ en las escalas LL3 y LL03, para obtener:

$$\sinh 1,38 = \frac{3,97 - 0,25}{2} = 1,86 \quad (19)$$

En cuanto al logaritmo de la raíz cúbica es mucho más práctico hacer el logaritmo y dividir el resultado por 3; ya que si situamos el cursor en el 5 de la escala LL3, y llevamos el 1 de la escala C a esa línea, buscamos con el cursor el valor de 1,86, que en este caso se sitúa en la escala LL2, y en la vertical de esta marca, en la escala C encontramos su logaritmo en base 5L; posteriormente solo hay que dividir por 3 el valor obtenido así:

$$\log_5 1,86 = 0,385 \rightarrow \log_5 \sqrt[3]{1,86} = \frac{0,385}{3} = 0,128 \quad (20)$$

Y por tanto tenemos que:

$$\left(\frac{3,28 \cdot 12\,600 \cdot 0,034}{\cos 0,4 \cdot \sqrt{215} \cdot 47} \right)^{\log_5 \sqrt[3]{\sinh 1,38}} = 2,22^{0,128} \quad (21)$$

Ya solamente nos queda tirar de las escalas exponenciales para obtener el resultado sin tener que apuntar resultados intermedios, simplemente, se busca $\ln 2,22$, se multiplica por 0,128 y se vuelve a hacer la exponencial, teniendo eso sí cuidado de qué escala usamos en cada caso, así para el primer logaritmo hay que usar la LL2 y para la última exponencial también la LL2; con esas consideraciones obtenemos:

$$2,22^{0,128} = e^{0,128 \cdot \ln 2,22} = 1,108 \quad (22)$$

La calculadora da un resultado de 1,106. Una vez más, es sorprendente la precisión alcanzada con la regla de cálculo con un poco de cuidado y de práctica.

Ejemplo. Calcular la expresión $\left(\frac{4,27 \cdot 3,28 \cdot 0,36}{\ln 4,42 \cdot \cosh 0,8 \cdot \tan 0,4} \right)^{\log(\sinh 0,7)}$.

Más de lo mismo, en este ejemplo voy a ir un poco más rápido, excepto en la estimación de lo que hay dentro del paréntesis.

Para estimar $\ln 4,42$ (aunque se mira en un momentito en la regla) sabemos que e vale algo menos de 3, luego el logaritmo natural de 4 debe ser algo mayor que 1 y desde luego menor que 2, porque e^2 es significativamente mayor que 4, así que lo estimo en 1,5.

Para estimar el coseno hiperbólico, como es un número menor que 1 voy a aproximararlo por su primer término de la serie de Taylor, que se parece mucho a la del coseno, excepto porque se suma y no se resta. $\cosh 0,8 \approx 1 + \frac{0,8^2}{2} = 1,32$.

Para estimar la tangente hago lo mismo, $\tan 0,4 \approx 0,4$.

Así la estimación de lo que hay dentro del paréntesis es:

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 0,4}{1,5 \cdot 1,3 \cdot 0,4} \approx \frac{12}{2} \approx 6 \quad (23)$$

Operando como en el ejemplo anterior, en donde lo único diferente que hay es calcular el logaritmo decimal de un número menor que 1, por lo que hay que tener en cuenta el uso correcto de la mantisa y la característica, el resultado es:

$$\left(\frac{4,27 \cdot 3,28 \cdot 0,36}{\ln 4,42 \cdot \cosh 0,8 \cdot \tan 0,4} \right)^{\log(\sinh 0,7)} = 6^{-0,12} = e^{-0,12 \cdot \ln 6} = 0,807 \quad (24)$$

En cuanto al resultado con calculadora ⁴ es 0,807

Creo que con estos dos ejemplos, aunque he calculado muchos más, ya se ve claro que la regla de cálculo se porta de forma excelente en este tipo de cálculos. Tengo que decir que me ha sorprendido mucho la precisión que he obtenido en la mayoría de los ejemplos de este tipo que he acometido, aunque se encadenen muchas operaciones complicadas, la precisión casi no se resiente.

⁴Aunque esté mal decirlo, soy un auténtico monstruo en esto de las estimaciones. Los ejemplos que pongo son de mi invención y no estaban preparados a priori, es decir, no tenía ni idea de cuál era el resultado cuando los planteé. Así, en este último ejemplo tengo que reconocer que yo mismo tuve que hacer varias veces las cuentas para convencerme de que había clavado la estimación.

4. ¿Cuándo es mejor usar 10^x que e^x ?

Todo el mundo diría que es más fácil y rápido manejar las funciones e^x y $\ln x$ que 10^x y $\log x$ a la hora de tratar con potencias y exponentes varios porque no hay que apuntar resultados intermedios ni tener en cuenta la característica y la mantisa, ya que los resultados de e^x y de $\ln x$ se leen directamente en la regla.

En general es así, pero hay que tener en cuenta que en la regla de cálculo el argumento de la función e^x está limitado al intervalo $[-10, 10]$ con una ligera discontinuidad en torno a $x = 0$; además, para $x > 5$ o algo así, la precisión de la lectura de la función e^x es poca. Esto quiere decir que tratando con números grandes la cosa no está tan clara y puede que la función 10^x sea una mejor opción, o una combinación de ambas. Veamos varios ejemplos:

Ejemplo. Calcular $\ln 3\,800\,000$. Una vez calculado este logaritmo, calcular su inverso para volver a obtener el valor de partida.

Empezamos con un ejemplo fácil pero que nos sirve para establecer los límites de las escalas que manejamos. Evidentemente si intentamos buscar este valor en las escalas LL, no llegamos ni por asomo, ya que el máximo corresponde con e^{10} , que en la regla se lee como 22 000, aunque en realidad es 22 026, 47.

Si queremos usar las escalas LL simplemente planteamos:

$$\ln 3\,800\,000 = \ln 3,8 \cdot 10^6 = \ln 3,8 + 6 \ln 10 = 1,34 + 13,8 = 15,14 \quad (25)$$

Hay que decir que para hacer la multiplicación no hay que apuntar nada, solo buscar 10 en la escala LL3, subir su valor a la escala D y multiplicar por 6. Bastante fácil, ¿no? Pero el problema empieza al hacer la inversa. En efecto $e^{15,14}$ se sale de las escalas LL y entonces hay que pensar en algo más.

La solución es recurrir a la escala L, como si nuestra regla fuera una regla básica sin escalas LL. Así:

$$e^{15,14} = 10^{15,14 \cdot \log e} = 10^{15,14 \cdot 0,4343} = 10^{6,58} = 10^6 \cdot 10^{0,58} = 3,8 \cdot 10^6 \quad (26)$$

Aquí hemos obtenido un buen resultado, pero no hay que llamarse a engaño, tenemos pocas cifras significativas y el número no es tan grande; por cierto, que el valor de $\log e = 0,4343$ es de esos números que todo el mundo se sabe, si no es el caso, se usa la escala L sabiendo que $e = 2,718\dots$

Ejemplo. Calcular $2\,300^{6,4}$

De entrada, observamos que estamos ante un número bastante grande, por lo que los errores al manejar las funciones e^x , 10^x y sus correspondientes logaritmos pueden ser importantes. Ante este hecho, adoptamos una estrategia consistente en “trocear” el problema en partes independientes, planteando el mismo como el producto de una exponencial con buena precisión por una potencia de 10 grande, con lo que los errores de ambas operaciones se independizan y no se concatenan, como sí pasará en cualquiera de las dos estrategias

que veremos a continuación, por lo que es de esperar una mayor precisión con esta primera estrategia. Así el planteamiento es:

$$\begin{aligned} 2\,300^{6,4} &= 2,3^{6,4} \cdot (10^3)^{6,4} = e^{6,4 \cdot \ln 2,3} \cdot 10^{19,2} = \\ &= e^{6,4 \cdot \ln 2,3} \cdot 10^{0,2} \cdot 10^{19} = 210 \cdot 1,58 \cdot 10^{19} = 3,32 \cdot 10^{19} \end{aligned} \quad (27)$$

Con la calculadora el resultado es $3,27 \cdot 10^{21}$, por lo que confirmamos que con este planteamiento nos hemos acercado a la solución, obteniendo un error relativo del 1,5 %.

De cualquier manera esta estrategia funciona cuando tenemos una base grande (mayor que 10) y un exponente relativamente pequeño, de modo que la clave es poder tener una exponencial no muy grande (no más allá de e^6 o algo así, para que se pueda leer con una precisión aceptable en la regla). En cuanto a la potencia de 10, aunque sea grande, es bastante precisa porque su exponente surge de una simple multiplicación y no de una concatenación de operaciones, con lo que su parte decimal, que es la que importa para la precisión del resultado, es calculada con buena precisión. Por todo ello, esta estrategia tiene una validez algo limitada; si el caso es el contrario, es decir, base menor que 10 y exponente grande, no sería de aplicación.

Si aplicamos ahora la estrategia general a un problema de exponenciación escribimos:

$$2\,300^{6,4} = e^{6,4 \cdot (\ln 2,3 + 3 \ln 10)} = e^{49,5} \quad (28)$$

Vemos que estamos en un caso similar al del ejemplo anterior, es decir, nos salimos de los valores establecidos en las escalas LL, y en este caso por bastante mayor margen, por lo que recurrimos a una estrategia mixta usando primero la función e^x y posteriormente 10^x y escribimos:

$$e^{49,5} = (e^{4,95})^{10} = 141^{10} = 10^{10 \cdot \log 141} = 10^{10 \cdot 2,15} = 10^{21} \cdot 10^{0,5} = 3,16 \cdot 10^{21} \quad (29)$$

Dado el tamaño de números que manejamos, el cálculo no está del todo mal, aunque no sirve como un resultado fino. Como era de esperar, el error es apreciable, en este caso del 3,4 %. Ello surge de concatenar la función e^x y la función $\log x$. Un pequeño error al apreciar el valor de la función e^x repercute apreciablemente en la función $\log x$ y por tanto en la subsecuente 10^x .

Si intentamos la estrategia de usar solamente potencias de 10 tenemos:

$$2\,300^{6,4} = 10^{6,4 \cdot \log 2\,300} = 10^{6,4 \cdot 3,362} = 10^{21,5} = 10^{21} \cdot 10^{0,5} = 3,16 \cdot 10^{21} \quad (30)$$

Hay que advertir que en este tipo de cálculos la diferencia entre leer por ejemplo 21,5 en la escala D o leer 21,6 es muy poca, pero al hacer la potencia de 10 esta diferencia se hace muy importante; por lo que digamos que los resultados no son muy reproducibles y dependen de la mano del artista.

Ejemplo. Calcular 2^{64}

Este numerito es famoso en matemáticas por diversas razones. En primer lugar es la solución al clásico problema de los granos de arroz (o de trigo según versiones) y el ajedrez, lo que no es otra cosa que la suma de una progresión geométrica de razón 2 y 64 términos, siendo el primer término 1. Bueno, en realidad la suma de la progresión es $2^{64} - 1$, lo que es restarle 1 grano a un océano de arroz, pero, siendo rigurosos sirve para tener claro que la suma de la progresión es un número impar. Este tipo de números $2^n - 1$ son lo que se denominan números de Mersenne y sirven para encontrar números primos realmente grandes. De hecho el mayor número primo conocido es el número de Mersenne correspondiente a $n = 82\,589\,933$ y tiene más de 24 millones de cifras; o sea, que al lado de éste, nuestro “gigante” $2^{64} - 1$ es despreciable. Así de grandes son los números grandes que manejan los matemáticos. Por otro lado 2^{64} también es el número de direcciones de memoria que puede manejar un procesador de los que tenemos en cualquier ordenador doméstico.

A lo que iba; con carácter general, la estrategia de dividir el problema en el producto de una exponencial por una potencia de 10 grande en principio no sirve porque la base es $2 < 10$, aunque al final de este ejemplo veremos que como 2 es un número muy particular, podremos usar esta estrategia en este caso. Por ello intentamos primero la estrategia mixta y después la basada exclusivamente en la potencia de 10, a ver a dónde llegamos.

$$\begin{aligned} 2^{64} &= e^{64 \cdot \ln 2} = e^{44,4} = \left(e^{4,44}\right)^{10} = 84^{10} = 10^{10 \cdot \log 84} = \\ &= 10^{19,24} = 10^{19} \cdot 10^{0,24} = 1,74 \cdot 10^{19} \end{aligned} \quad (31)$$

Ahora la estrategia basada exclusivamente en potencias de 10:

$$2^{64} = 10^{64 \cdot \log 2} = 10^{19,25} = 10^{19} \cdot 10^{0,25} = 1,78 \cdot 10^{19} \quad (32)$$

La calculadora da un resultado de $1,84 \cdot 10^{19}$

En este caso nos hemos acercado más al valor real con la segunda estrategia que con la primera, pero sigo subrayando el hecho de lo difícil que es discriminar los valores de los exponentes con la regla de cálculo.

Finalmente y en este caso particular, como ya hemos dicho, las potencias de 2 son algo conocidas para todo aquel que haya trabajado con cuestiones informáticas, y por tanto, no es descabellado suponer que es conocido que $2^{16} = 65\,536$. Si no nos acordamos de todas las cifras, sí que al menos a más de uno le sonará aquello que que 16 bits de color eran 65,5 k colores, en cualquier caso, no es demasiado difícil calcular 2^{16} a mano. Así que podemos escribir:

$$\begin{aligned} 2^{64} &= \left(2^{16}\right)^4 = 6,55^4 \cdot \left(10^4\right)^4 = e^{4 \cdot \ln 6,55} \cdot 10^{16} = \\ &= 1\,800 \cdot 10^{16} = 1,8 \cdot 10^{19} \end{aligned} \quad (33)$$

Podíamos seguir con más ejemplos, pero ya se ve claro que cuando trabajamos con números realmente grandes la regla de cálculo de 25 cm no tiene resolución suficiente para dar resultados aceptablemente precisos (aunque en algunos casos nos acerquemos al valor real, en otros casos diferiremos bastante y no hay forma de preverlo, ya que una pequeño error en el exponente puede conllevar un error apreciable en el resultado); haría falta por tanto una regla de cálculo más grande, de 50 cm de escala (o en su defecto la 2/83 N y su escala de logaritmos decimales equivalente a la de una regla de 50 cm) y tampoco estoy muy seguro de que la precisión mejorase mucho. Éste es pues otro ámbito donde las tablas de logaritmos se imponían a las reglas de cálculo.

Este hecho solamente se ve mitigado en el caso particular de tener que elevar un número relativamente grande a una potencia relativamente pequeña con lo que podemos dividir el cálculo en una exponencial de precisión razonable por una potencia de 10 grande, pero de cálculo razonablemente preciso, con lo que el producto de los dos resultados dará una precisión aceptable en principio según hemos visto.

Para concluir, todo lo que hemos dicho sobre números muy grandes es aplicable obviamente a números (positivos) muy pequeños basados en cálculos con exponentes negativos, puesto que una potencia negativa no es otra cosa que el inverso de la misma potencia positiva, que es el caso tratado en este apartado.

5. Manejando factoriales.

Calcular el factorial de un número algo mayor que 10 mediante su definición es un proceso largo y tedioso, aparte de que la estimación de orden de magnitud del resultado puede resultar compleja. Por otro lado, los factoriales de los números naturales del 1 al 10 son relativamente fáciles de recordar directamente, con lo que no aporta mucho ponerse a calcularlos con la regla. La tabla siguiente recoge los factoriales del 0 al 10:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800

Y entonces, ¿no podemos hacer algo útil con la regla en este aspecto? Pues sí, para eso está la fórmula de Stirling, que da una aproximación asintótica para el factorial. En efecto, la fórmula de Stirling establece que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1 \quad (34)$$

De donde se toma la aproximación:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (35)$$

En realidad esta aproximación se puede refinar añadiendo a esta expresión el producto por una serie infinita en términos de $\frac{1}{n}$, pero eso ya es mucha tela y una complejidad innecesaria e inmanejable con la regla de cálculo. Para manejar el factorial con la regla de cálculo, lo mejor es tomar el logaritmo de la expresión anterior y se llega a las siguientes expresiones prácticas en función del logaritmo natural o del logaritmo decimal, según nos interese:

$$\begin{aligned} \ln(n!) &= 0,92 - n + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n \\ \log(n!) &= 0,4 - 0,4343n + \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n \end{aligned} \quad (36)$$

Otra ventaja nada desdeñable de la fórmula de Stirling es que permite calcular el factorial de cualquier número real positivo definido a partir de la función gamma de Euler. En efecto, la función gamma de Euler se define como:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (37)$$

Para $x > 0$ esta integral converge absolutamente y se demuestra muy fácilmente (integrando por partes) que:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad (38)$$

Si x es un número natural mayor que cero se tiene pues que:

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1) \cdot \Gamma(n-1) = \dots = n! \quad (39)$$

Por tanto, se extiende el concepto de factorial a los reales positivos como:

$$x! = \Gamma(x+1) \quad (40)$$

Y así, mediante el uso de la fórmula de Stirling es tan fácil aproximar el valor del factorial de cualquier real positivo como aproximar el valor del factorial de cualquier natural.

Ejemplo. *Aproximar mediante la fórmula de Stirling el valor de $6,7!$*

Comencemos calculando con el logaritmo natural porque es más rápido y cómodo:

$$\ln(6,7!) = 0,92 - 6,7 + 7,2 \cdot \ln 6,7 = 7,92 \rightarrow 6,7! = e^{7,92} = 2750 \quad (41)$$

Si calculamos con el logaritmo decimal tenemos:

$$\log(6,7!) = 0,4 - 0,043 \cdot 6,7 + 7,2 \cdot \log 6,7 = 3,45 \rightarrow 6,7! = 10^{3,45} = 2810 \quad (42)$$

Con la calculadora (mi calculadora hace factoriales de números reales) el resultado usando la función factorial es 2770. Aquí hay que recordar que estamos calculando con la fórmula de Stirling, no con el factorial directamente (o la función gamma en este caso). La fórmula de Stirling con calculadora da un resultado de 2736. Así que no está tan mal la aproximación en este caso.

Ejemplo. *Aproximar mediante la fórmula de Stirling el valor de $15,3!$*

Aquí son números más grandes por lo que usaré el logaritmo decimal:

$$\log(15,3!) = 0,4 - 0,4343 \cdot 15,3 + 15,8 \cdot \log 15,3 \rightarrow 15,3! = 10^{12,46} = 2,89 \cdot 10^{12} \quad (43)$$

El factorial con calculadora da $2,99 \cdot 10^{12}$ mientras que la fórmula de Stirling con calculadora da $2,97 \cdot 10^{12}$.

Lógicamente cuanto mayores van siendo los argumentos, mayores errores podemos cometer, ya que un pequeño error en el exponente se traduce en un error apreciable en el resultado; así que hay que ser consciente de la validez de este método, que se reduce a tener una buena estimación del resultado, cosa que a veces es suficiente y otras no, depende del caso.

6. Algo sobre combinatoria.

Hacer cálculos de combinatoria con la regla de cálculo no es fácil, este es uno de los puntos donde cualquier regla de cálculo palidece ante la calculadora científica más sencilla que haya, pasa prácticamente como con el factorial, es realmente tedioso obtener cualquier número combinatorio que no sea pequeño, y para los pequeños, ya tenemos el triángulo de Pascal, que en un momento nos permite obtener números combinatorios hasta por lo menos orden 10 requiriendo para ello solamente sumas. No obstante podemos calcular números combinatorios no tan pequeños en algunos casos en los que el numerador no tenga demasiados factores y el denominador sea el factorial de un número pequeño, típicamente hasta 10 o así.

Otra estrategia es calcular los factoriales mediante la fórmula de Stirling, pero a nada que el número combinatorio sea algo grande saldrán unos factoriales monstruosos.

Ejemplo. *Calcular el número de combinaciones de la lotería primitiva.*

Como sabemos en la lotería primitiva se meten 49 números en un bombo y se sacan 6 sin importar el orden, por tanto:

$$C_{49,6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{720} \quad (44)$$

Para estimar correctamente el orden de magnitud del resultado previamente a calcular vamos emparejando factores del numerador empezando por los extremos y nos damos cuenta de que $49 \cdot 44$ se parece a 2 000 es algo más, pero no importa porque tiene que ser menos que $50^2 = 2\,500$; lo mismo pasa si emparejamos $48 \cdot 45$ y si emparejamos $47 \cdot 46$. Así cada producto lo aproximamos por 2 000 y tenemos en el numerador $2\,000^3 = 8 \cdot 10^9$; esto lo dividimos por aproximadamente 700 con lo que el resultado debe estar sobre $1,2 \cdot 10^7$ o así. No necesitamos nada más fino, simplemente un orden de magnitud.

Por tanto, lo que nos queda es hacer la cuenta en cascada, teniendo en cuenta que comenzamos por la primera división y el primer producto lo hacemos normal, a partir de ahí, vamos alternando dividir por el inverso usando la escala CI y hacer producto normal, así que en principio no necesitamos apuntar ningún resultado intermedio. Con estas consideraciones el resultado es:

$$\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{720} = 1,40 \cdot 10^7 \quad (45)$$

La calculadora nos da un resultado de 13 983 816 con lo que el resultado es casi perfecto y ha sido obtenido en un momento. Comparemos esto con el esfuerzo de haber calculado los tres factoriales con la fórmula de Stirling.

7. Conclusiones.

La regla de cálculo es un cacharro genial para hacer cuentas, es increíble que con tan poco se pueda hacer tanto y tan bien. Me gusta porque además obliga a quien la maneja a tratar con respeto a las matemáticas. O dicho de otro modo, creo que manejar la regla de cálculo ayuda y mucho a usar correctamente las herramientas actuales de cálculo, sea una calculadora científica, o una hoja de cálculo, o cualquier otro software.

Además, a nada que se sea cuidadoso, la precisión de los resultados puede ser sorprendente, esto es quizás lo que menos me esperaba a priori, la capacidad de encadenar cálculos complicados sin que se resienta significativamente la precisión de los resultados.

Dicho todo lo anterior, hay que reconocer sus limitaciones, que a nada que uno tenga que bregar de verdad todos los días con cálculos medianamente especializados, son bastantes. De hecho, creo que por eso el proceso de sustitución de la regla de cálculo por la calculadora electrónica de bolsillo fue uno de los más rápidos en la historia de la tecnología. en unos pocos años se pasó de que todo el mundo tuviera una regla de cálculo a su desaparición. Y eso, sin duda ocurrió por muy buenas razones.

Teniendo todo esto en cuenta, las principales limitaciones de la regla de cálculo son;

1. La precisión de las razones trigonométricas muchas veces no es suficiente, esto quizás es más importante tratando con ángulos pequeños.
2. La precisión de los logaritmos y las funciones de exponenciación no es suficiente cuando se trata con números grandes.
3. En general, la aritmética de números enteros no se lleva bien con la regla de cálculo, así fue una buena herramienta para ingenieros, que con 3 cifras significativas solemos tener suficiente, pero no tan buena herramienta para quienes tenían que manejar números enteros grandes con todas sus cifras.