

INSTRUCCIONES  
PARA EL USO  
DE LA REGLA  
DE CALCULO

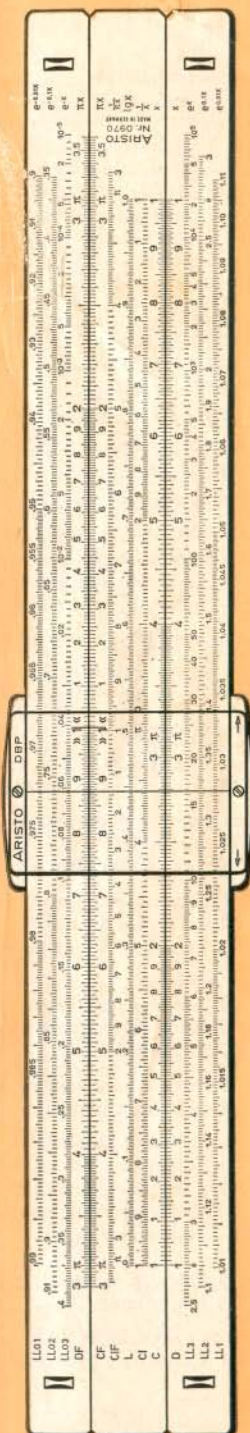
ARISTO

MULTILOG  
HYPERBOLOG  
HYPERLOG

870 · 0970 · 01070  
0971 · 0972

Escala de números normales 1364

S



ARC

www.reglasdecalculo.com

# INDICE

1. Generalidades	4
1.1 Manejo de la regla de cálculo	4
1.2 Indicación de propiedad	5
1.3 Tratamiento de la regla de cálculo-ARISTO	5
1.4 Desmontaje del cursor	5
1.5 Ajuste del cursor	5
1.6 Desmontaje del cursor L 0972	6
1.7 Ajuste del cursor L 0972	6
1.8 Seportes nº 770 y 772 para reglas de cálculo	6
1.9 Representación gráfica de los ejemplos	7
2. Disposición de las escalas	8
ARISTO-MultiLog	8
ARISTO-HyperboLog	10
ARISTO-HyperLog	12
3. Lectura de las escalas	14
4. Cálculo de aproximación	15
5. Principio de cálculo	15
6. Multiplicación	16
7. División	17
8. Las escalas desplazadas CF y DF	17
8.1 Cálculo de tablas sin «corrimiento» de la reglilla	17
8.2 Lectura directa de multiplicaciones y divisiones por el número $\pi$	18
9. Multiplicación y división unidas	18
10. Las escalas recíprocas CI y CIF	19
10.1 La escala recíproca DI	20
11. Proporciones	20
12. Las escalas A, B y K	21
12.1 El cálculo con las escalas A y B	22
13. Las escalas pitagóricas	22
13.1 La escala P	22
13.2 Las escalas H1 y H2	23
14. Las funciones trigonométricas	23
14.1 La escala de seno S	24
14.2 La escala de tangente T	24
15. La escala ST	25
15.1 Ángulos pequeños — ángulos grandes	26
15.2 Conversión grados $\leftrightarrow$ radianes	26
15.3 Las marcas $g'$ y $g''$	27
16. El cálculo trigonométrico de triángulos planos	27
16.1 Números complejos	29
17. Las escalas exponenciales	29
17.1 Potencias y raíces de exponente 10 y 100	30
17.2 Potencias $y = a^x$	30
17.3 Casos particulares de $y = a^x$	32
17.4 Potencias $y = e^x$	35
17.5 Raíces $a = \sqrt[x]{y}$	35
17.6 Logaritmos	36
18. Otras aplicaciones de las escalas exponenciales	37
18.1 Cálculo de proporciones con las escalas exponenciales	38

19. Las funciones hiperbólicas	39
19.1 Las escalas Sh1 y Sh2	40
19.2 La escala Ch	40
19.3 La escala Th	42
19.4 Fórmulas fundamentales de las funciones hiperbólicas	42
20. Las funciones hiperbólicas de argumento complejo	42
20.1 Sh ( $x + jy$ )	43
20.2 Ch ( $x + jy$ )	46
20.3 Tgh ( $x + jy$ )	49
21. Las funciones trigonométricas de argumento complejo	49
22. La inversión de los problemas de los capítulos 20 y 21	49
22.1 Arg Sh $r/\varphi = x + jy$	50
22.2 Arg Ch $r/\varphi = x + jy$	50
22.3 Arg Tgh $r/\varphi = x + jy$	51
22.4 arc sen $r/\varphi = x + jy$	51
22.5 arc cos $r/\varphi = x + jy$	51
22.6 arc tan $r/\varphi = x + jy$	52
23. Ejemplos de aplicación	52
24. El cursor y sus marcas	56
24.1 La marca 36	56
24.2 Las marcas $2\pi$	57
24.3 Superficies circulares, pesos de barras de acero	57
24.4 Las marcas kW y PS (CV)	58
25. La escala de números normales 1364	58
25.1 Disposición de la escala de números normales	58
25.2 Finalidad de la escala NZ	58
25.3 Reglas graduadas logarítmicas	59
25.4 Factores de conversión para unidades no métricas	59

Reservados todos los derechos, de modo especial la traducción a idiomas extranjeros.

Prohibida la reimpresión, también parcial.

© 1957 por ARISTO-WERKE · DENNERT & PAPE KG · HAMBURG

RA/TLS/RL · Impreso en Alemania · Borek 7358



## Prólogo

El manejo de las tres reglas de cálculo ARISTO-MultiLog, ARISTO-HyperboLog y ARISTO-HyperLog se trata en un solo folleto. Cuando sea necesario, por la claridad de las explicaciones el texto ya hará mención de las diferencias.

Las escalas de la regla de cálculo ARISTO-HyperboLog y su disposición son muy parecidas a la ARISTO-MultiLog. En el anverso la identidad es total, mientras que en el reverso las escalas LL0 y LL00 de la ARISTO-MultiLog han sido substituidas por las Sh1, Sh2 y Th en la ARISTO-HyperboLog.

En comparación con la ARISTO-HyperboLog tiene la ARISTO-HyperLog además de las escalas Sh1, Sh2 y Th de las funciones hiperbólicas, senoidales y tangenciales una escala Ch del coseno hiperbólico y dos escalas hiperbólicas H1 y H2. Las escalas de función angular han sido ampliadas con la escala pitagórica; las escalas exponenciales por las escalas LL0 y LL00.

### 1. Generalidades

Esta instrucción de manejo trata de las escalas de la regla de cálculo, de su alcance y de su campo de aplicación. Se explica cómo se calcula con las escalas y qué relaciones existen entre ellas. Para cada escala se presentan ejemplos para aclarar el principio en que se basa. Al igual que en un formulario se indica lo más importante.

Para el cálculo con la regla es necesaria la práctica! Para ejemplos y extensas explicaciones recomendamos los libros:

Hassenpflug: Der Rechenstab ARISTO-Studio

Stender/Schuchardt: Der moderne Rechenstab

#### 1.1 Manejo de la regla de cálculo

Para el cálculo se coge la regla con las manos y se coloca en una posición tal, que la raya del cursor no arroje ninguna sombra. La colocación de la reglilla se efectúa mejor, mediante presión y contrapresión. Con los dedos pulgar e índice de una de las manos se coge el extremo sobresaliente de la reglilla que se encuentra junto al cuerpo de la regla, de forma que moviendo los dedos, a la vez que se apoyan sobre el cuerpo de la regla, sean posibles movimientos en un sentido y en otro. Con la otra mano se coge el listoncillo superior del cuerpo de la regla de una forma tal, que con la punta del pulgar sea posible ejercer una contrapresión sobre el otro extremo de la reglilla.

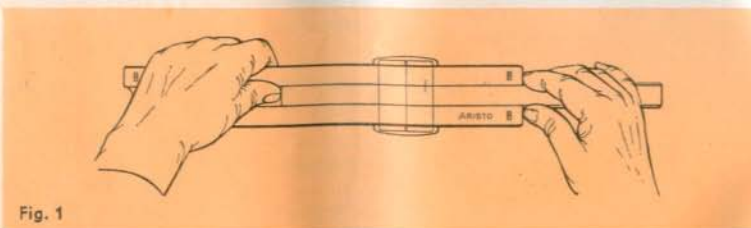


Fig. 1

La colocación del cursor puede efectuarse con una sola mano, pero es más rápida y exacta si se efectúa con los dedos pulgar e índice de ambas manos. Para que el cursor se mueva siempre verticalmente a las divisiones debe de apretarse el canto guía, que se encuentra frente al resorte del cursor, ligeramente contra el canto de la regla.

#### 1.2 Indicación de propiedad

En el estuche se encuentra debajo de la escala de números normales ARISTO 1364 un suplemento transparente, que sirve de alojamiento a la escala de números normales. La tarjetita que se encuentra debajo puede sacarse doblando la tira transparente y en ella puede escribirse el nombre.

#### 1.3 Tratamiento de la regla de cálculo ARISTO

La regla de cálculo es un valioso medio auxiliar de cálculo y necesita un tratamiento cuidadoso. Las escalas y el cursor deben de protegerse de la suciedad y de los arañazos, para que no sufra la exactitud de la lectura.

Se recomienda limpiar la regla de vez en cuando con el producto especial de limpieza DEPAROL y después pulirla en seco. En ningún caso deben de emplearse productos químicos, ya que éstos pueden destruir las divisiones.

Debe de protegerse la regla de las gomas de borrar plásticas y de sus residuos, ya que éstos pueden dañar la superficie del ARISTOPAL. Además debe de evitarse su colocación en lugares calientes, como p. ej. sobre radiadores de calefacción o a pleno sol, ya que a temperaturas superiores a 60° C pueden presentarse deformaciones. Para reglas de cálculo con tales daños no habrá recambio bajo garantía.

#### 1.4 Desmontaje del cursor

(sólo para ARISTO-MultiLog y ARISTO-HyperboLog)

Las rayas del cursor están ajustadas de tal modo al conjunto de escalas, que siempre es posible pasar de un lado a otro en cualquier cálculo, sin que por ello se pierda el ajuste. Los cristales del cursor están fijados a los brazos de éste, por un lado con cuatro tornillos y, por el otro, con dos que parecen pulsadores.

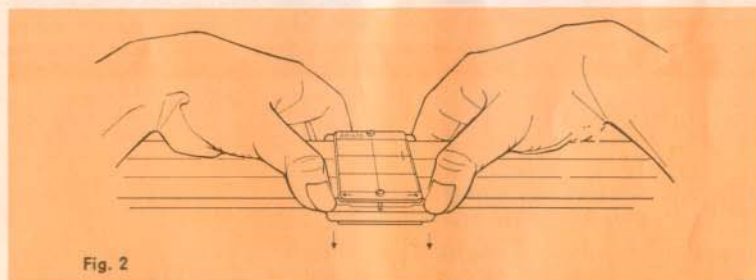


Fig. 2

Para separar el cursor de la raya, se aprietan hacia abajo con las uñas de los pulgares, los extremos marcados con flechas de los brazos del cursor, hasta que éste se abra. El pulsador superior se abre al levantar el cristal y, entonces, el cursor puede quitarse fácilmente.

#### 1.5 Ajuste del cursor

(sólo para ARISTO-MultiLog y ARISTO-HyperboLog)

En el caso de que el cursor precise ajuste, p. ej. en el caso de colocar uno de repuesto, se coloca la regla de cálculo sobre una mesa, de forma, que quede hacia arriba el lado del cursor con los cuatro tornillos. Después de aflojar esos cuatro tornillos con un destornillador adecuado, se da la vuelta a la regla de



cálculo y se coloca lo más exacto posible la raya del cursor sobre el 1 de la escala D y sobre la marca  $\pi$  en la escala DF. Las marcas-e en LL2 y la marca auxiliar en LL02 son ayudas adicionales. Entonces se da nuevamente la vuelta a la regla de cálculo, teniendo sumo cuidado para que no se mueva el cursor, y sujetando bien éste, se alinea el vidrio superior del cursor con los valores finales 1 y 1000 de las escalas DI y K. Por último se atornillan bien los cuatro tornillos.

### 1.6 Desmontaje del cursor L 0972 (sólo para ARISTO-HyperLog)

Las rayas del cursor están ajustadas de tal modo al conjunto de escalas, que es posible durante el cálculo el paso de un lado al otro de la regla. El cursor puede desmontarse para su limpieza sin que se pierda el ajuste mientras no sea aflojado el tornillo de la guía del cursor.

Para el desmontaje se sujeta el cursor fuertemente con una mano en la guía del cursor provista del tornillo. La guía contraria, que no lleva tornillo, se saca del enclavamiento de los cristales del cursor girando transversalmente con respecto a la regla esta guía (fig. 2a). Entonces pueden desmontarse los cristales y la guía.

Al montar el cursor debe ponerse atención en que las marcas del cursor para kW y CV (PS) se encuentren sobre las escalas A y B. El lateral provisto de muelle se coloca entonces sobre los cristales del cursor y se engatilla mediante una ligera presión.

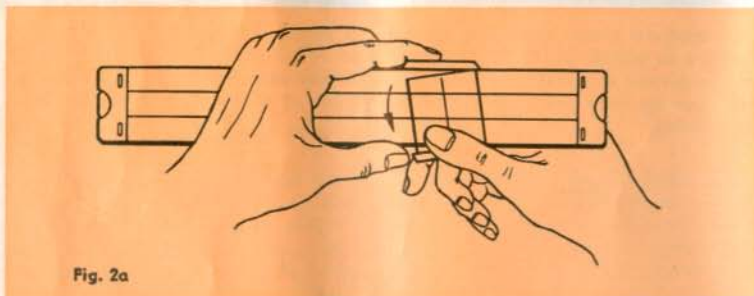


Fig. 2a

### 1.7 Ajuste del cursor L 0972 (sólo para ARISTO-HyperLog)

Después de aflojado el tornillo de ajuste del cursor se da la vuelta a la regla, para poder ajustar la raya del cursor con el final de la escala T1 y S. Sin mover el cursor se voltea la regla y se coloca sobre la mesa, ajustando la otra parte del cursor según las marcas auxiliares sobre las escalas LL. A continuación se vuelve a apretar el tornillo.

### 1.8 Soportes nº 770 y 772 para reglas de cálculo

Los soportes nº 770 y 772 para reglas de cálculo, que se suministran con la ARISTO-MultiLog, ARISTO-HyperboLog y ARISTO-Hyperlog se encajan lateralmente sobre la regla de cálculo y dan a ambas caras una posición más elevada e inclinada, es decir, más favorable para su lectura sobre el escritorio. De esta forma son fácilmente abarcables las escalas, cuando p. ej. la regla de cálculo se encuentra sobre la mesa para el cálculo de tablas. La posición elevada permite sobre todo el libre movimiento de cursores con lupa.

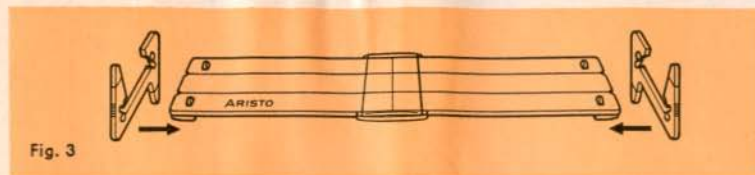


Fig. 3

Al encajar lateralmente los soportes de la regla de cálculo se gira ésta de forma que la cara de los ángulos esté hacia arriba. Los soportes se empujan entonces de tal forma sobre los puentes de unión de la regla de cálculo, que pueda verse el estriado, y los resaltes del soporte puedan encajar en las ranuras de los puentes de unión.

### 1.9 Representación gráfica de los ejemplos

A continuación se usa una representación abreviada de los ejemplos, que nos muestra mejor el camino seguido para hallar la solución y el orden de las colocaciones, que la representación convencional de la regla de cálculo. Las escalas vienen representadas por líneas paralelas en cuyos extremos se halla su denominación abreviada. Los siguientes símbolos facilitan la lectura de las figuras:

Posición inicial  
Posición intermedia  
Resultado final  
Posición o lectura de un resultado intermedio  
Dar la vuelta a la regla de cálculo  
Las flechas indican la sucesión de operaciones y la dirección del movimiento  
Una raya vertical representa el cursor.

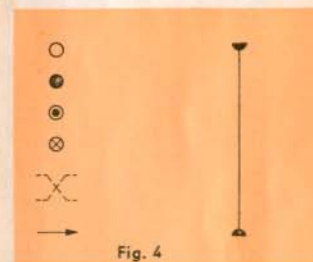


Fig. 4



## 2. Disposición de las escalas

### LA REGLA DE CALCULO *ARISTO*-MULTILOG 0970

<b>Anverso</b>	LL01	Escala exponencial, alcance 0,99—0,9	$e^{-0,01x}$	} En la parte superior del cuerpo
	LL02	0,91—0,35	$e^{-0,1x}$	
	LL03	0,4 —0,00001	$e^{-x}$	
	DF	Escala básica desplazada por $\pi$	$\pi^x$	} En la reglilla
	CF	Escala básica desplazada por $\pi$	$\pi x$	
	CIF	Escala recíproca de CF	$1/\pi x$	
	L	Escala de mantisas	$\lg x$	
	CI	Escala recíproca de C	$1/x$	
	C	Escala básica	$x$	} En la parte inferior del cuerpo
	D	Escala básica	$x$	
	LL3	Escala exponencial, alcance 2,5 —100000	$e^x$	
	LL2	1,1 —3,0	$e^{0,1x}$	
	LL1	1,01 —1,11	$e^{0,01x}$	

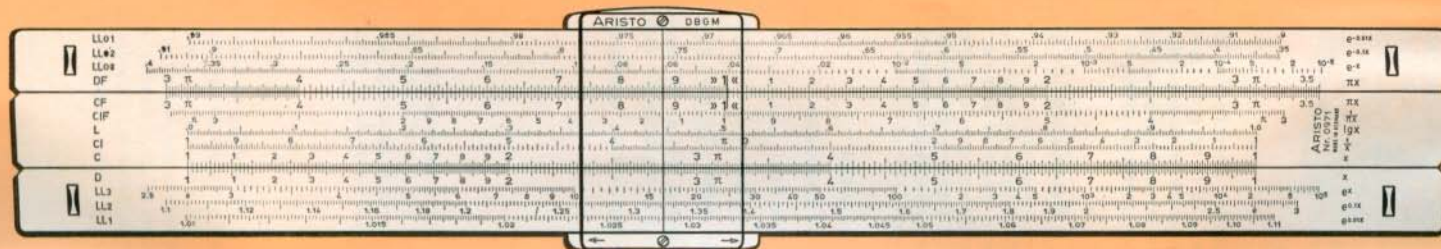


Fig. 5 Anverso 0970

<b>Reverso</b>	LL00	Escala exponencial, alcance 0,999—0,989	$e^{-0,001x}$	} En la parte superior del cuerpo
	K	Escala de cubos	$x^3$	
	A	Escala de cuadrados	$x^2$	
	B	Escala de cuadrados	$x^2$	} En la reglilla
	T	Escala de tangentes y cotangentes de 5,5° a 45°, en sentido inverso de 45° a 84,5°	$\tan$	
	ST	Escala de ángulos pequeños en radianes de 0,55° a 6°	$\text{arc}$	
	S	Escala de senos y cosenos de 5,5° a 90°, en sentido inverso de 0° a 84,5°	$\sin$	
	C	Escala básica	$x$	
	D	Escala básica	$x$	} En la parte inferior del cuerpo
	DI	Escala recíproca de D	$1/x$	
	LL0	Escala exponencial, alcance 1,001—1,011	$e^{0,001x}$	



Fig. 6 Reverso 0970



# LA REGLA DE CALCULO *ARISTO*-HYPERBOLOG 0971

Anverso	LL01	Escala exponencial, alcance	0,99—0,9	$e^{-0,01x}$	En la parte superior del cuerpo
	LL02		0,91—0,35	$e^{-0,1x}$	
	LL03		0,4 —0,00001	$e^{-x}$	
	DF	Escala básica desplazada por $\pi$		$\pi x$	En la reglilla
	CF	Escala básica desplazada por $\pi$		$\pi x$	
	CIF	Escala recíproca de CF		$1/\pi x$	
	L	Escala de mantisas		$\lg x$	
	CI	Escala recíproca de C		$1/x$	
	C	Escala básica		$x$	En la parte inferior del cuerpo
	D	Escala básica		$x$	
	LL3	Escala exponencial, alcance	2,5 —100000	$e^x$	
	LL2		1,1 —3,0	$e^{0,1x}$	
	LL1		1,01—1,11	$e^{0,01x}$	



Fig. 7 Anverso 0971

Reverso	Th	Tangentes hiperbólicas; alcance	0,1—3,0	$\tanh$	En la parte superior del cuerpo
	K	Escala de cubos		$x^3$	
	A	Escala de cuadrados		$x^2$	
	B	Escala de cuadrados		$x^2$	En la reglilla
	T	Escala de tangentes y cotangentes de 5,5° a 45°, en sentido inverso de 45° a 84,5°		$\tan$	
	ST	Escala de ángulos pequeños en radianes de 0,55° a 6°		$\text{arc}$	
	S	Escala de senos y cosenos de 5,5° a 90°, en sentido inverso de 0° a 84,5°		$\sin$	
	C	Escala básica		$x$	
	D	Escala básica		$x$	En la parte inferior del cuerpo
	DI	Escala recíproca de D		$1/x$	
	Sh2	Senos hiperbólicos; alcance	0,85—3,0	$\sinh$	
	Sh1		0,1 —0,9	$\sinh$	



Fig. 8 Reverso 0971



# LA REGLA DE CALCULO *ARISTO* - HYPERLOG 0972

Anverso	LL00	Escala exponencial, alcance	0,999 — 0,989	$e^{-0,001x}$	En la parte superior del cuerpo
	LL01		0,99 — 0,9	$e^{-0,01x}$	
	LL02		0,91 — 0,35	$e^{-0,1x}$	
	LL03		0,4 — 0,00001	$e^{-x}$	
	DF	Escala básica desplazada por $\pi$		$\pi x$	
	CF	Escala básica desplazada por $\pi$		$\pi x$	En la regilla
	CIF	Escala recíproca de CF		$1/\pi x$	
	L	Escala de mantisas		$\lg x$	
	CI	Escala recíproca de C		$1/x$	
	C	Escala básica		$x$	
	D	Escala básica		$x$	En la parte inferior del cuerpo
	LL3	Escala exponencial, alcance	2,5 — 100000	$e^x$	
	LL2		1,1 — 3,0	$e^{0,1x}$	
	LL1		1,01 — 1,11	$e^{0,01x}$	
	LL0		1,001 — 1,011	$e^{0,001x}$	

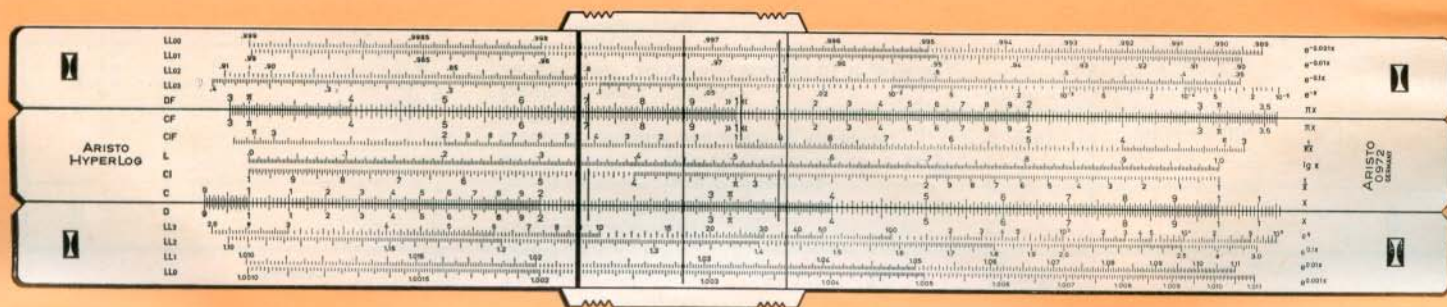


Fig. 9 Anverso 0972

Reverso	H2	Escala hiperbólica,	alcance 1,4	hasta 10	$\sqrt{1+x^2}$	En la parte superior del cuerpo
	Sh2	Escala del seno hiperbólico,	alcance 0,85	hasta 3	$\sinh$	
	Th	Escala de tangentes hiperbólicas,	alcance 0,1	hasta 3	$\tanh$	
	K	Escala de cubos			$x^3$	
	A	Escala de cuadrados			$x^2$	
	B	Escala de cuadrados			$x^2$	En la regilla
	T	Escala de tangentes o escala de cotangentes	para 5,5°	hasta 84,5°	$\tan$	
	ST	Escala de tangentes, seno y escala-arc	para 0,55°	hasta 6°	$\arc$	
	S	Escalas de senos	para 5,5°	hasta 90°	$\sin$ $\cos$	
	P	Escala pitagórica	alcance 0	hasta 0,995	$\sqrt{1+x^2}$	
	C	Escala básica			$x$	En la parte inferior del cuerpo
	D	Escala básica			$x$	
	DI	Escala de valores recíprocos a D			$1/x$	
	Ch	Escala del coseno hiperbólico	alcance 0	hasta 3	$\cosh$	
	Sh1	Escala del seno hiperbólico	alcance 0,1	hasta 0,9	$\sinh$	
	H1	Escala de hipérbolas	alcance 1,005	hasta 1,5	$\sqrt{1+x^2}$	

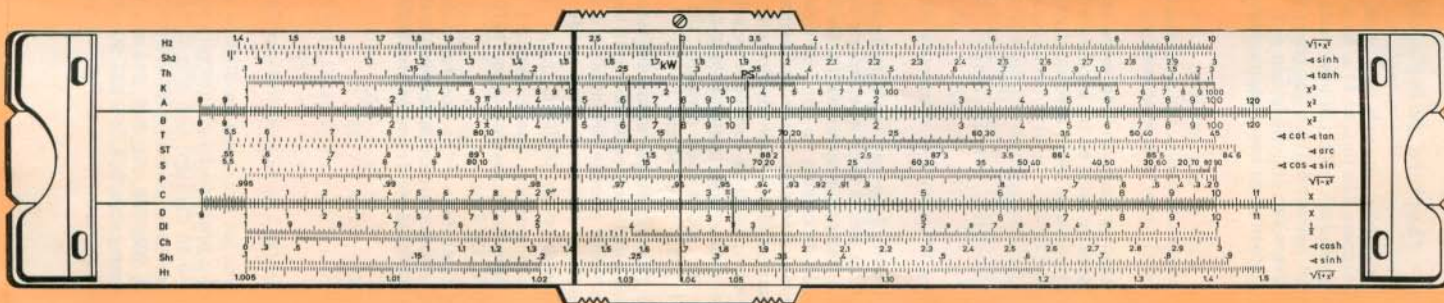


Fig. 10 Reverso 0972



### 3. Lectura de las escalas

Para manejar la regla de cálculo es imprescindible leer con seguridad y rapidez las escalas. Las figuras 11 a 14 presentan ejemplos en las escalas fundamentales más usadas C y D. Los intervalos principales tienen rayas de división largas que están numeradas con las cifras del 1 al 10 (fig. 11). En la cara angular el 10 vuelve a ser designado con el 1, ya que esta división puede considerarse como el comienzo de una nueva escala, idéntica a la anterior.

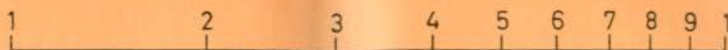


Fig. 11 Intervalos principales

El espacio comprendido entre las cifras 1 y 2 se subdivide de forma parecida a como se hace en las escalas milimétricas, con la única diferencia de que aquí los intervalos entre divisiones van disminuyendo hacia la derecha.



Fig. 12 Lectura en el intervalo del 1 al 2

La cifra 2 de una regla milimétrica puede leerse como 2 cm, 20 mm, 0,2 dm, 0,02 m etc.; es decir que, aparte de la dimensión, surge la cifra 2 en combinación con varias potencias de 10. De la misma manera las cifras de la escala de la regla de cálculo no dan indicación alguna del lugar donde se ha de colocar la coma. Por esta razón es aconsejable leer una sucesión de cifras sin coma, expresándolas individualmente, p. ej. uno-tres-cuatro y no ciento treinta y cuatro; así no se cambia ni se salta ninguna cifra. Para ejercitarse en la lectura, conviene mover lentamente la raya del cursor desde el valor 1 hacia la derecha, y leer sobre cada división: 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114 etc.

La raya del cursor es tan delgada en comparación con el ancho de los intervalos que puede colocarse con toda seguridad en el centro del intervalo entre rayas. También pueden distinguirse a simple vista fracciones de intervalo, de modo que con alguna práctica puede apreciarse hasta la décima parte, obteniendo así una cuarta posición.

Como ejercicio puede seguirse moviendo el cursor lentamente de izquierda a derecha, entre las rayas 1310 y 1320, apreciando p. ej.: 1311, 1312, 1313, 1314, 1315 etc.

Al interpolar entre dos rayas numeradas debe ponerse especial cuidado en no olvidar los ceros, especialmente al principio de la escala, p. ej. 1000, 1001, 1002, 1003 etc. (compárense 1007 en fig. 12).



Fig. 13 Lectura en el intervalo del 2 al 4

Como los intervalos de división a la izquierda del 2 son ya bastante estrechos, se ha grabado en el intervalo siguiente, entre las cifras 2 y 4, solamente cada segunda división; con ello se obtiene un nuevo cuadro en el que de división en división solamente se cuentan los valores pares de la tercera cifra: 200, 202, 204, 206, 208, 210, 212, 214 etc. Los centros de estos intervalos dan los valores impares: 201, 203, 205, 207, 209, 211, 213 etc. La fig. 13 presenta algunos ejemplos de lectura.

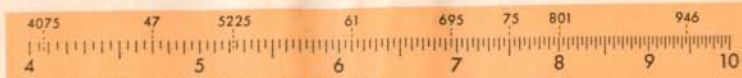


Fig. 14 Lectura en el intervalo del 4 al 10

En el intervalo del 4 al 10 se obtiene de nuevo la segunda cifra en las rayas largas. Las rayas cortas dan el 5 de la tercera cifra, de forma que la lectura en este intervalo sería: 500, 505, 510, 515 etc. Todos los demás valores de la tercera cifra deberán tasarse entre las divisiones.

Entre 400 y 405 se encuentra el valor 4025, un poco a la izquierda del 402 y a la derecha del 403. Correspondientemente indica el centro del intervalo siguiente el valor 4075. La fig. 14 presenta una serie de graduaciones.

### 4. Cálculo de aproximación

En la regla de cálculo se gradúan y se leen exclusivamente sucesiones de cifras. Solamente después de un cálculo de estimación se halla la posición exacta de la coma en el resultado y se lleva a cabo al mismo tiempo un control de la primera cifra del cálculo.

Algunas reglas para el cálculo de estimación:

¡Redondear fuertemente los valores!

p. ej.  $3,43 \approx 3$        $9,51 \approx 10$        $7,61 \approx 8$        $0,76 \approx 1$

¡En las multiplicaciones redondear un factor hacia arriba y el otro hacia abajo!

p. ej.  $8,92 \cdot 127 \approx 10 \cdot 120 \approx 1200$   
 $2,19 \cdot 9830 \approx 2 \cdot 10000 \approx 20000$

¡Simplificar las divisiones!

Procurar redondear el numerador y el denominador en el mismo sentido.

p. ej.  $\frac{725}{539} \approx \frac{7,25}{5,39} \approx \frac{7}{5} \approx 1,4$   
 $\frac{640 \cdot 15,3}{51 \cdot 0,8} \approx \frac{60 \cdot 20}{5 \cdot 1} \approx 240$

La separación de potencias de diez facilita el cálculo con valores numéricos muy grandes o muy pequeños.

p. ej.  $73215 \approx 7 \cdot 10^4$        $0,0078 \approx 8 \cdot 10^{-3}$   
 $889 \approx 9 \cdot 10^2$        $0,706 \approx 7 \cdot 10^{-1}$

¡La separación de potencias de diez al multiplicar o dividir respectivamente con valores numéricos muy grandes o muy pequeños da mayor claridad al cálculo!

p. ej.  $0,07325 \cdot 0,000513 \approx 8 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \approx 40 \cdot 10^{-6} \approx 4 \cdot 10^{-5}$   
 $\frac{2950}{0,00598} \approx \frac{3 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-3}} \approx 0,5 \cdot 10^6$

### 5. Principio de cálculo

Se calcula de forma tal, que se suman o restan segmentos. El método de cálculo puede explicarse de forma sencilla mediante dos reglas milimétricas.

La fig. 15 presenta el ejemplo  $2 + 3 = 5$ . Colocando el extremo inicial 0 de la regla superior sobre el valor 2 de la regla inferior, puede sumarse al valor 2 graduado, por ejemplo, el segmento 3, con ayuda de la escala superior. Bajo



el 3 de la regla superior se encuentra el resultado 5 en la regla inferior. En la fig. 15 también podría leerse  $2 + 1 = 3$  o  $20 + 15 = 35$  si se contasen los milímetros.

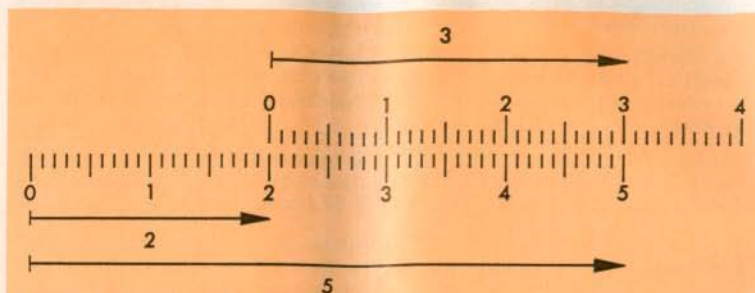


Fig. 15 Adición gráfica con escalas

También puede deducirse de la fig. 15 la sustracción  $5 - 3 = 2$ , sin más que seguir el proceso inverso. Del segmento 5 de la escala inferior se resta el segmento 3 de la escala superior, para lo que se superponen los valores 5 y 3, y debajo del extremo inicial de la escala superior se encuentra el resultado 2 en la escala inferior.

En la regla de cálculo se encuentran las escalas sobre un cuerpo fijo y sobre una reglilla desplazable. La particularidad de la regla de cálculo está en que las escalas son logarítmicas. La suma gráfica de dos segmentos da por lo tanto una multiplicación y la sustracción una división.

## 6. Multiplicación

(Se suman dos segmentos)

El extremo inicial 1 de la escala C de la reglilla se lleva sobre el valor 18 de D. Moviendo el cursor hasta el valor 13 de la escala C, se suma al segmento 18 el segmento 13 y el resultado 234 puede leerse en la escala D debajo de la raya del cursor. Mediante un cálculo aproximado como  $(20 \cdot 10 = 200)$ , resulta la posición de la coma.

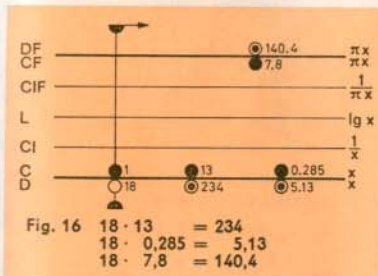


Fig. 16  $18 \cdot 13 = 234$   
 $18 \cdot 0.285 = 5.13$   
 $18 \cdot 7.8 = 140.4$

Para el cálculo de la operación  $18 \cdot 7.8$  se lleva a cabo el «corrimento» de la reglilla, es decir, se coloca el extremo final de la escala C sobre el 18 de D. Pero puede evitarse este movimiento adicional, si se sigue calculando con el par de escalas superior CF/DF.

Las escalas CF y DF permiten esta simplificación en el cálculo, porque son una repetición de las escalas fundamentales C y D, con la diferencia de que, el principio 1 de la escala se encuentra aproximadamente en el centro de la regla de cálculo. Así p. ej., cuando en el par de escalas inferior se encuentre frente al valor 1 de la escala C el valor 18 de la escala D, se podrá leer la misma graduación en el par de escalas superior, es decir, el 1 de la escala CF debajo del 18 de la escala DF y por lo tanto podrá multiplicarse en ambos pares de escalas por el factor 18. La operación  $18 \cdot 7.8$  se calcula con las escalas CF/DF llevando la raya del cursor sobre el 7.8 de la escala CF y leyendo el resultado 140.4 en la escala DF.

## 7. División

(Sustracción de dos segmentos, inversión de la multiplicación)

La raya del cursor se lleva sobre el valor 2620 de D y el número 17.7 de la escala C se coloca debajo de la raya del cursor, de forma que ambos valores se encuentren frente a frente. El resultado 148 se encuentra frente al extremo inicial de la escala C de la reglilla y para otros ejemplos puede encontrarse frente al extremo final.

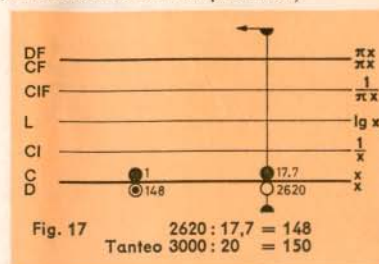


Fig. 17  $2620 : 17.7 = 148$   
Tanteo  $3000 : 20 = 150$

Sobre el 1 de CF también podrá leerse el resultado en la escala DF, porque la operación  $2620 : 17.7$  también está graduada en las escalas CF/DF.

La misma colocación de la reglilla es también válida para la multiplicación  $148 \cdot 17.7 = 2620$ . La diferencia entre la multiplicación y la división se encuentra pues solamente en el orden seguido de las graduaciones. En la división se lee el resultado siempre en el cuerpo de la regla frente al extremo inicial o final de la escala y no existe el «corrimento» de la reglilla. Esta propiedad se aplicará repetidamente en los capítulos siguientes.

## 8. Las escalas desplazadas CF y DF

Las escalas CF y DF son una repetición de las escalas fundamentales C y D, pero desplazadas con respecto a éstas de tal forma, que el valor  $\pi = 3,142$  de CF o DF se encuentra exactamente sobre el extremo inicial o final de las escalas fundamentales C o D respectivamente. Su valor 1 se encuentra aproximadamente en el centro de la regla de cálculo, de forma que se consigue con las escalas desplazadas una subdivisión de las escalas fundamentales, de aproximadamente media longitud de la regla de cálculo. Ambos pares de escalas C/D y CF/DF forman así un conjunto, del que resultan sensibles ventajas de cálculo en multiplicaciones, cálculo de tablas y de proporciones.

El valor 1 de la escala CF marca en DF siempre el mismo valor que el 1 o 10 de la escala C sobre la D. Las multiplicaciones llevadas a cabo hasta ahora pueden efectuarse también con el par de escalas superiores CF/DF, con la ventaja de que automáticamente se elige la graduación correcta. No es necesario decidir, si es mejor comenzar con el extremo izquierdo o el derecho. Si se gradúa una división con las escalas superiores, se encuentra el numerador y el denominador en la regla de cálculo en la misma posición, que si estuvieran escritos en forma de quebrado.

No existe el «corrimento» de la reglilla, ya que si no es posible la lectura del resultado en uno de los pares de escalas, siempre es posible en el otro. Las rayas amarillas de la reglilla recuerdan, que los factores se gradúan en las escalas móviles C y CF de la reglilla y que el resultado se leerá en D sobre C o en DF sobre CF.

### 8.1 Cálculo de tablas sin «corrimento» de la reglilla

$$y = 29x$$

x	1,7	3,45	5,0	10
y	49,3	100	145	290

Para  $x = 5$  puede leerse en el par de escalas superior sin que sea necesario el «corrimento» de la reglilla.

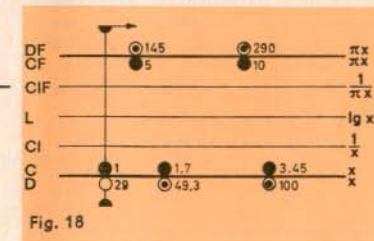


Fig. 18



$$y = \frac{28,2}{x} = 28,2 \cdot \frac{1}{x}$$

x	7,43	2,92	1,567
y	3,795	9,66	18,0

$$y = \frac{x}{18,2} = \frac{1}{18,2} \cdot x$$

x	3,17	112,1
y	0,1742	6,16

## 8.2 Lectura directa de multiplicaciones y divisiones por el número $\pi$

Como las escalas CF y DF están desplazadas por el factor  $\pi$ , resulta que el pasar de D a DF o de C a CF respectivamente, se efectúa una multiplicación y en el proceso inverso, una división por  $\pi$ . Cuando p. ej. se gradúa con la raya del cursor el diámetro  $d$  en la escala D, puede leerse en la escala DF el perímetro  $U = \pi \cdot d$ . De forma similar se calcula la pulsación  $\omega = 2\pi f$ , cuando se gradúa  $2f$  en D.

En todas las operaciones, que contengan el factor  $\pi$ , se tiene éste en cuenta en la última lectura al pasar a las escalas desplazadas. La fig. 21 presenta una recopilación de todos los cálculos posibles con el factor  $\pi$ , mediante una sola graduación del cursor. Para cálculos con el factor 360 véase cap. 24.1.



Fig. 19

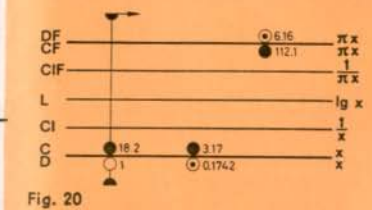


Fig. 20

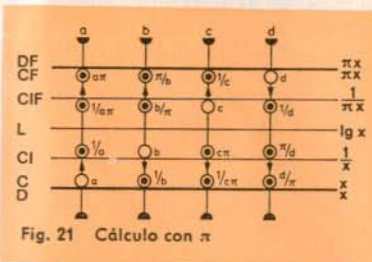


Fig. 21 Cálculo con  $\pi$

## 9. Multiplicación y división unidas

Para expresiones de la forma  $\frac{a \cdot b}{c}$  obsérvese el siguiente principio:

Primero dividir y luego multiplicar. Después de la división  $345 : 132$  de la fig. 22, no es necesario leer el resultado intermedio, ya que la regla está ya dispuesta para la multiplicación. Se lleva el cursor hasta el valor 22 de la escala C, y debajo en la escala D se lee el resultado 57,5.

Si en este ejemplo ampliamos el denominador con el factor 19,5

$$\frac{345 \cdot 22}{132 \cdot 19,5} = 2,95$$

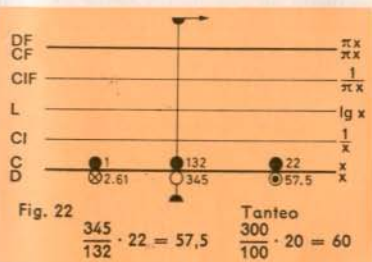


Fig. 22

puede dividirse a continuación el resultado de la fig. 22, colocando el valor 19,5 de la escala C debajo de la raya del cursor, de forma que se divida 57,5 por 19,5.

Si en expresiones de este tipo existen más factores en el numerador y en el denominador, se sigue dividiendo y multiplicando alternadamente. La variación rítmica de las graduaciones de la reglilla y del cursor procuran un caudal uniforme en el cálculo con un mínimo de graduaciones.

En estas operaciones puede ocurrir, que la reglilla, después de una división, sobresalga demasiado de la regla de cálculo y que antes de la multiplicación sea necesario efectuar un «corrimento» de la reglilla. Este caso particular puede evitarse en la mayoría de los casos, eligiendo adecuadamente la graduación de la división con C/D o CF/DF o intercambiando los factores respectivamente.

## 10. Las escalas recíprocas CI, CIF

La escala CI tiene la misma subdivisión que las escalas fundamentales C y D, pero discurre en sentido inverso, de derecha a izquierda, y para evitar errores de lectura está numerada con cifras rojas.

Colocando el cursor sobre cualquier valor  $x$  de la escala C, puede leerse su valor recíproco  $1/x$  en CI, según viene indicado en el borde derecho de la escala. Sobre el 5 de C se encuentra  $1/5 = 0,2$  en CI. Importante es, que la formación de números recíprocos también es válida en el sentido inverso, es decir en el paso de CI a C, p.ej. debajo del 4 de CI se encuentra el valor  $1/4 = 0,25$  en C.

Una lectura ocasional de los valores recíprocos no justificaría la existencia de la escala CI. Su importancia radica en que ahorra graduaciones en operaciones compuestas.

$$\frac{4}{5} \text{ puede escribirse también como } 4 \cdot \frac{1}{5} \text{ y } 4 : 5 \text{ es lo mismo que } \frac{4}{5}.$$

Esta forma de escribir no es la acostumbrada, pero tiene la ventaja para el cálculo con la regla, de que transforma una división en una multiplicación y recíprocamente una multiplicación en una división. Un «juego» con números sencillos nos mostrará mejor esta transformación.

1. Si llevamos el cursor sobre el 6 de D y colocamos el 2 de C debajo de la raya del cursor, tendremos la división normal  $6 : 2 = 3$  (fig. 23). Pero si dejamos quieto el cursor y movemos la reglilla, colocando debajo de la raya del cursor el 2 de la escala CI, efectuaremos la multiplicación  $6 \cdot 2$ , leyéndose el resultado 12 al igual que en una división debajo del uno de la reglilla (fig. 24). En realidad hemos calculado  $6 \cdot 0,5$ , ya que al colocar el 2 de CI debajo de la raya del cursor hemos colocado al mismo tiempo el valor recíproco 0,5 en C.

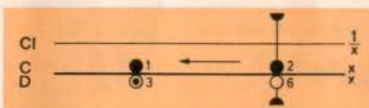


Fig. 23

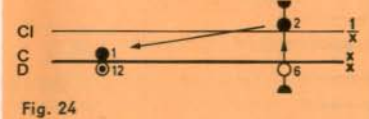


Fig. 24

2. Si dejamos ahora el uno de la escala C sobre el 12 de D y llevamos el cursor sobre el 4 de C, obtendremos la multiplicación normal  $12 \cdot 4 = 48$  (fig. 25). Pero si movemos el cursor hasta el 4 de CI leeremos el resultado de la división

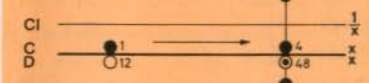


Fig. 25



$12:4 = 3$  en D (fig. 26). Con otras palabras: como debajo del 4 de CI se encuentra en C el valor recíproco  $1/4 = 0,25$ , se ha calculado en realidad  $12:0,25 = 3$ .

Existen por lo tanto para la multiplicación y división dos posibilidades de graduación, de las cuales el calculador experimentado escogerá en cada caso la mejor, con el fin de obtener, en el cálculo de una expresión compuesta, divisiones y multiplicaciones alternadas. Las relaciones citadas hasta ahora entre las escalas C y CI valen de igual forma para las escalas CF y CIF. Para verlo, es aconsejable repetir el mismo «juego de números» con el grupo de escalas CF/DF/CIF.

Quien haya estudiado hasta ahora atentamente los capítulos anteriores, reconocerá ahora que la escala CIF es el justo complemento del sistema de escalas. Y aquel que aproveche convenientemente las ventajas de las escalas desplazadas, usará por igual la escala CIF como la escala CI.

Expresiones de la forma  $a \cdot b \cdot c$  o

$\frac{a}{b \cdot c \cdot d}$  etc. se resuelven, al igual que los problemas de multiplicación y división combinadas, mediante multiplicaciones y divisiones alternadas (cap. 9). Durante el cálculo puede pasarse del grupo de escalas C, D y CI al grupo de escalas CF, DF y CIF, para evitar un «corrimiento» de la reglilla.

En el ejemplo de la fig. 27 se coloca, al igual que en una división, el 185 de la escala D frente al 6 de la escala CI y se efectúa la multiplicación por 0,95 mediante la escala superior CF. El resultado 1054 se encuentra en la escala DF.

Para el calculador experimentado presenta ventajas la escala recíproca DI, cuando ocasionalmente se intercambian en un proceso de cálculo las funciones de las escalas del cuerpo de la regla y las de la reglilla, p. ej. al calcular proporciones.

### 10.1 La escala recíproca DI

La escala DI trae ventajas al calculador con regla, hábil, si en el transcurso de una operación se cambia ocasionalmente las funciones de las escalas en el cuerpo y las de la reglilla, p. ej. en el cálculo con proporciones. Se recomienda realizar multiplicaciones y divisiones simples con las escalas C y DI.

## 11. Proporciones

Proporciones de la forma  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$  pueden calcularse de una forma especialmente sencilla y clara, mediante la regla de cálculo, ya que al graduar una de las relaciones pueden leerse todas las demás, sin más que mover el cursor. La línea de separación entre la escala del cuerpo y de la reglilla puede considerarse como la raya del quebrado. Por ello debería de preferirse esta forma de cálculo a las demás.

Ejemplo: 9,5 kg de un producto cuestan ptas. 6,30, cuanto cuestan 8,4 kg? La solución con la regla de tres es:

$$\frac{6,30}{9,50} \cdot 8,4 = 5,57$$

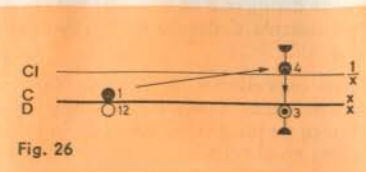


Fig. 26

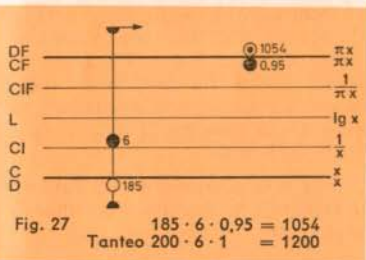


Fig. 27

$$185 \cdot 6 \cdot 0,95 = 1054$$

$$\text{Tanteo } 200 \cdot 6 \cdot 1 = 1200$$

Se gradúa como proporción la relación entre el peso y el precio. Colocando frente al peso 9,5 en la escala DF, el precio 6,30 en la escala CF, se encuentran frente a frente en las escalas CF/DF y C/D, todos los pesos y precios cuya relación (cociente) es igual a la graduada. Según la primera graduación se encuentran en DF y D todos los pesos y en las escalas CF y C los precios correspondientes. Frente al peso 8,4 se leerá por lo tanto el precio 5,57. En la figura están indicadas más relaciones peso-precio.

10,6 kg cuestan ptas. 7,03 (escala CF/DF)  
3,8 kg cuestan ptas. 2,52 (escala C/D)  
2,8 kg cuestan ptas. 1,86 (escala C/D)  
1 kg cuesta ptas. 0,66 (escala C/D)

Puede proseguirse pues la proporción a deseo:

$$\frac{\text{kg}}{\text{ptas.}} = \frac{9,5}{6,3} = \frac{8,4}{5,57} = \frac{10,6}{7,03} = \frac{3,8}{2,52} = \frac{2,8}{1,86} = \frac{1}{0,66} \dots$$

El cálculo de proporciones es en gran parte independiente de las reglas explicadas hasta ahora. Es indiferente, como y donde se gradúa frente a los kg las ptas., siendo decisivo, buscar los pesos donde se graduó el primer peso y leer los precios en la escala correspondiente que se encuentra frente a la anterior.

Este principio de la proporción directa  $a:b = c:d$ , con la regla de cuanto mayor tanto mayor, es también válido para las proporciones inversas, de regla cuanto mayor tanto menor y respectivamente cuanto menor tanto mayor, que llevan a la igualdad  $a \cdot b = c \cdot d$  y que pueden resolverse mediante las escalas recíprocas. Finalmente este principio es también válido para las proporciones mixtas  $a \cdot b = c \cdot d$  y  $a:b = c \cdot d$ .

## 12. Las escalas A, B y K

Si la raya del cursor se coloca sobre un valor cualquiera x de la escala C, se puede leer su cuadrado  $x^2$  en la escala B y su cubo  $x^3$  en la escala K. Operando en sentido inverso se obtendrá la raíz cuadrada y la raíz cúbica.

Ejemplos:

a)  $2^2 = 4$        $2^3 = 8$

b)  $32,7^2 = 3,27^2 \cdot 10^2 = 10,70 \cdot 100 = 1070$

$32,7^3 = 3,27^3 \cdot 10^3 = 35,0 \cdot 1000 = 35000$

c)  $\sqrt[2]{9} = 3$        $\sqrt[3]{27} = 3$

d)  $\sqrt[2]{51} = 7,14$        $\sqrt[3]{364} = 7,14$

La posición de la coma se deduce mediante un cálculo aproximado. En el cálculo de potencias y raíces, es ventajoso separar potencias de 10 hasta obtener un número cuyo resultado sea estimable fácilmente. Al hacer esto conviene recordar que la escala de cuadrados va desde 1 hasta 100 y la de cubos de 1 a 1000. De esta forma resulta mucho más fácil saber donde ha de colocarse el cursor. Al sacar la raíz surge la característica de la escala de función que se debe tener en cuenta la posición de la coma, al

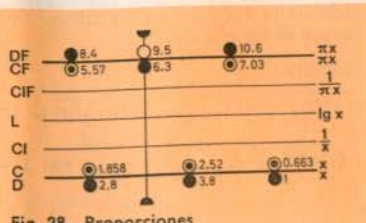


Fig. 28 Proporciones

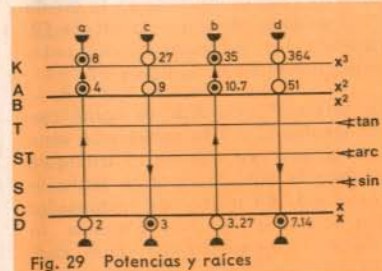


Fig. 29 Potencias y raíces



lado de la sucesión de las cifras. Ya no es igual, en que zona de la escala se coloca el radicando.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{3200} = \sqrt[3]{32 \cdot 100} = 10 \cdot \sqrt[3]{32} = 10 \cdot 5,66 = 56,6 \quad (\text{reducción por } 10^{2n})$$

$$\sqrt[3]{0,1813} = \sqrt[3]{\frac{181,3}{1000}} = \frac{1}{10} \cdot \sqrt[3]{181,3} = \frac{1}{10} \cdot 5,66 = 0,566 \quad (\text{reducción por } 10^{3n})$$

## 12.1 El cálculo con las escalas A y B

Las escalas A y B son, al igual que las escalas fundamentales C y D dos escalas idénticas, con la única diferencia, que en ellas están unidas dos escalas fundamentales, reducidas cada a la mitad. Su zona izquierda está numerada de 1 hasta 10 y la derecha de 10 hasta 100 por lo tanto puede solucionarse con estas escalas todas las operaciones hasta ahora mencionadas, del mismo modo, solo con una exactitud algo menor, ya que para su división está disponible solamente la mitad de la longitud de la regla de cálculo. En muchas operaciones es cómodo poder seguir calculando en la escala de cuadrados, si se han empezado con un cuadrado.

Las escalas colocadas una al lado de la otra tienen la ventaja, que en ningún caso se está obligado a un «corrimiento» de la reglilla.

## 13. Las escalas pitagóricas (sólo para 0972)

### 13.1 La escala P

En un triángulo rectángulo con la hipotenusa 1 vale, según la regla de Pitágoras, la relación  $y = \sqrt{1 - x^2}$ .

Para cada colocación  $x$  por  $0,1 < x < 1$  en la escala C, se lee en P el valor  $y = \sqrt{1 - x^2}$ . En el sentido inverso vale también  $x = \sqrt{1 - y^2}$ . En la fig. 31 se aprecia, que 0,6 puede colocarse tanto en la escala D como en la P, el resultado 0,8 está siempre en la escala colindante correspondiente.

Se escoge en cada caso el modo de lectura más apropiado para la exactitud. En el ejemplo  $\sqrt{1 - 0,15^2} = 0,9887$  se coloca 0,15 en la escala C. Las relaciones valen solamente para la zona de valores indicada en la escala P. Si además se añade la escala DI, resultan las relaciones intercambiables, indicadas en la figura 32.

La escala P simplifica en unión con las escalas C y S la conversión seno  $\leftrightarrow$  coseno, ya que en el triángulo rectángulo vale la relación  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ . En triángulos rectángulos discrecionales es más elegante la solución trigonométrica (véase cap. 16).

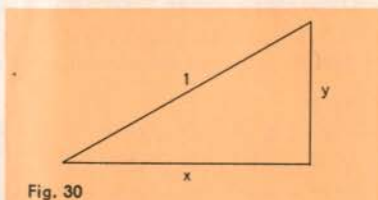


Fig. 30

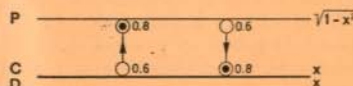


Fig. 31  $\sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8$

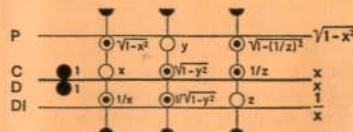


Fig. 32

Ejemplo de la electrotécnica:

$$\begin{aligned} \text{carga aparente} &\triangleq 1,0 \\ \text{carga efectiva} &\triangleq 0,85 \end{aligned}$$

$$\text{carga ciega} \triangleq \sqrt{1 - 0,85^2} = 0,527$$

Para el cálculo mas exacto de raíces cuadradas se forma p. ej.

$$\sqrt{0,91} = \sqrt{1 - 0,09} = 0,9540$$

0,09 se coloca en la parte izquierda de la escala B, entonces está  $\sqrt{0,09} = 0,3$

en C y el valor  $\sqrt{1 - 0,3^2} = 0,9540$  en P. Un aumento de la exactitud está garantizado hacia abajo hasta aproximadamente  $\sqrt{0,65}$ . Este cálculo siempre es conveniente en los casos que el radicando es solo por poco menor que 0,01; 1; 100 etc.

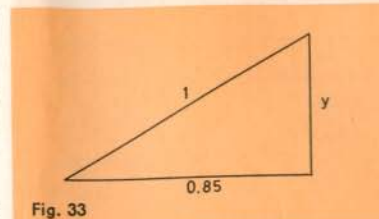


Fig. 33

## 13.2 Las escalas H1 y H2 (sólo para 0972)

La escala H de dos partes, con la denominación  $\sqrt{1 + x^2}$  en el final derecho de la escala, tiene igual que la P una relación directa con la escala fundamental D. Con la colocación  $x$  en D está  $y = \sqrt{1 + x^2}$  en H, y en el sentido inverso se lee para una colocación  $y$  en H la expresión  $x = \sqrt{y^2 - 1}$  en la escala D. Para H1 vale la zona 0,1 hasta 1,0 en D. Para H2 vale la zona 1 hasta 10. El parentesco de las escalas H1 y H2 con la P se manifiesta en que con ellas puede efectuarse cálculos pitagóricos.

$$\text{Con las escalas H1 y H2: } c = a \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$\text{Con la escala P: } b = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a}{c}\right)^2}$$

En el capítulo 19.2 se enseña otra aplicación más, esta vez en unión con las escalas Sh1 y Sh2, según la relación

$$\text{Ch } x = \sqrt{1 + \text{Sh}^2 x} \quad \text{y} \quad \text{Sh } x = \sqrt{\text{Ch}^2 x - 1}$$

Fijense también en la relación  $\sec \alpha = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$ . Aparte de un intercambio en las relaciones, en las escalas H y D están puestas las coordenadas

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{y} \quad x = \sqrt{1 + y^2}$$

de la hipérbola  $x^2 - y^2 = 1$ , una en frente de la otra.

## 14. Las funciones trigonométricas

Todas las funciones de ángulos están relacionadas con las escalas fundamentales y los ángulos están indicados en división de  $360^\circ$  con subdivisión decimal. Para cada colocación de un ángulo en las escalas S, T o ST puede leerse la correspondiente función en la escala básica C. Procediendo de manera inversa, la colocación de la función en la escala básica permite hallar el ángulo correspondiente. La numeración de ángulos de las escalas con división decimal S y T vale solamente para los valores de grado escritos.

La regla de cálculo da solo funciones para los ángulos del primer cuadrante. En la tabla que sigue se hallan reunidas las equivalencias de cualquier ángulo al primer cuadrante:



	$\pm \alpha$	$90^\circ \pm \alpha$	$180^\circ \pm \alpha$	$270^\circ \pm \alpha$
sen	$\pm \text{sen } \alpha$	$+\cos \alpha$	$\mp \text{sen } \alpha$	$-\cos \alpha$
cos	$+\cos \alpha$	$\mp \text{sen } \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \text{sen } \alpha$
tan	$\pm \tan \alpha$	$\mp \cot \alpha$	$\pm \tan \alpha$	$\mp \cot \alpha$
cot	$\pm \cot \alpha$	$\mp \tan \alpha$	$\pm \cot \alpha$	$\mp \tan \alpha$

#### 14.1 La escala de seno S

La escala S para valores de seno está numerada de  $5,5^\circ$  hasta  $90^\circ$  y en sentido contrario para valores de coseno de  $0^\circ$  hasta  $84,5^\circ$  en rojo. Todos los valores de seno y de coseno en la escala C empiezan con 0, ..... Los valores de los ángulos  $\alpha > 45^\circ$  pueden leerse más exactos en la escala P, numerada en rojo, de la ARISTO-HyperLog según la relación:

$\text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ ; para la colocación del ángulo se utilizan las cifras rojas de la escala S. «Regla de colores» para las funciones sinusoidales: Coloquen y léanse siempre en escalas con numeración del mismo color. Por  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha}$  valen para los valores de coseno de los ángulos  $\alpha < 45^\circ$  relaciones análogas con la regla de colores: A cada colocación en S pertenece la lectura de color diferente en las escalas C o P.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \text{sen } 26^\circ &= 0,438 \\ \text{sen } 82^\circ &= \sqrt{1 - \cos^2 82^\circ} \\ &= 0,9903 \\ \text{arc sen } 0,54 &= 32,7^\circ \\ \cos 75^\circ &= 0,2588 \\ \cos 7^\circ &= \sqrt{1 - \text{sen}^2 7^\circ} \\ &= 0,99255 \\ \text{arc cos } 0,9852 &= 9,87^\circ \end{aligned}$$

#### 14.2 La escala de tangentes T

La escala de tangentes está numerada de  $5,5^\circ$  hasta  $45^\circ$  en negro y en sentido contrario de  $45^\circ$  hasta  $84,5^\circ$  en rojo. Para valores de ángulos negros se lee la función tangencial en la escala C, sus valores empiezan con 0, ...

Como  $\tan \alpha = 1/\cot \alpha$ , puede leerse la función tangencial para valores de ángulos rojos  $\alpha > 45^\circ$  o bien en la escala CI o, con colocación básica de la reglilla, también en DI. La escala recíproca llega entonces de  $\tan 45^\circ = 1$  hasta  $\tan 84,29^\circ = 10$ .

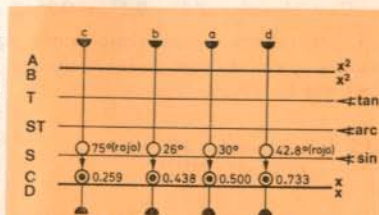


Fig. 34 Seno y coseno con 0970 y 0971

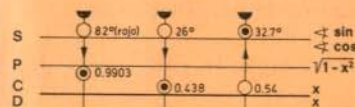


Fig. 35 Seno con 0972

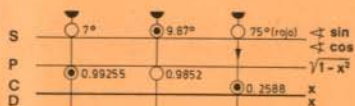


Fig. 36 Coseno con 0972

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \tan 14^\circ &= 0,249 \\ \tan 23,6^\circ &= 0,437 \\ \tan 41,1^\circ &= 0,872 \\ \tan 51,2^\circ &= 1,244 \\ \tan 73,4^\circ &= 3,35 \\ \tan 81,4^\circ &= 6,61 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{arc tan } 1,75 &= 60,25^\circ \\ \text{arc tan } 2,0 &= 63,43^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cot 9^\circ &= 6,31 \\ \cot 14^\circ &= 4,01 \\ \cot 23,6^\circ &= 2,289 \\ \cot 41,1^\circ &= 1,146 \\ \cot 51,2^\circ &= 0,804 \\ \cot 68,25^\circ &= 0,399 \\ \cot 77^\circ &= 0,2309 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{arc cot } 2,0 &= 26,57^\circ \\ \text{arc cot } 1,75 &= 29,74^\circ \end{aligned}$$



Fig. 37 Tangente y cotangente

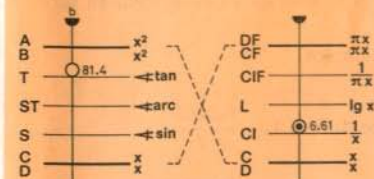


Fig. 38 Lectura tan 81,4 en CI

Se leen los valores cotangenciales según la fórmula  $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$  como valores recíprocos de los valores tangenciales, por lo que se encuentran los valores cotangenciales para ángulos  $< 45^\circ$  en las escalas CI o DI y para ángulos  $> 45^\circ$  en C.

Obsérvense: Colores iguales de la numeración para colocación y lectura dan el valor de la tangente, colores distintos el valor de la cotangente del ángulo colocado.

#### 15. La escala ST

Esta escala es una continuación de las escalas S y T para ángulos, cuyos valores de función se leen entre 0,01 y 0,1 en la escala C; pero llena también el importante cometido de convertir grados en radianes en el paso a la escala C.

Cuando se buscan  $\text{sen } \alpha$  y  $\tan \alpha$  para  $\alpha < 5,5^\circ$  o bien  $\cos \alpha$  y  $\cot \alpha$  para  $\alpha > 84,5^\circ$  valen las aproximaciones:

$$\text{sen } \alpha \approx \tan \alpha \approx \cos (90^\circ - \alpha) \approx \cot (90^\circ - \alpha) \approx \frac{\pi}{180} \alpha^\circ = 0,01745 \alpha.$$

La escala ST está numerada de  $0,55^\circ$  hasta  $6^\circ$ , pero dividida en radianes. Esto posibilita la lectura de los radianes exactos de los ángulos en la escala fundamental C como también de las aproximaciones de los valores sinusoidales y tangenciales de ángulos pequeños. La numeración roja en sentido contrario de la escala ST (de  $84^\circ$  hasta  $89,45^\circ$ ) vale para los valores correspondientes de coseno y de cotangente.

La coincidencia entre  $\text{sen } \alpha$ ,  $\tan \alpha$  y  $\text{arc } \alpha$  es muy buena hasta  $4^\circ$ ; p. ej.  $\text{sen } 4^\circ = 0,0698$ ,  $\tan 4^\circ = 0,0699$  y  $\text{arc } 4^\circ = 0,0698$ . Con ángulos más grandes entre  $4^\circ$  y  $6^\circ$  se calcula más exacto

$$\text{sen } \alpha \approx \alpha \cdot \frac{\text{sen } 6^\circ}{6^\circ} \quad \text{respectivamente} \quad \tan \alpha \approx \alpha \cdot \frac{\tan 6^\circ}{6^\circ}$$



### 15.1 Ángulos pequeños — ángulos grandes

Algunos ejemplos para este cálculo de aproximación sirven de ejercicio para la aplicación de las escalas funcionales:

$$\text{sen } 4,7^\circ = 4,7 \cdot \frac{\text{sen } 6^\circ}{6^\circ} = 0,0819$$

$$\tan 4,7^\circ = 4,7 \cdot \frac{\tan 6^\circ}{6^\circ} = 0,0822$$

$$\text{sen } 5,3^\circ = 5,3 \cdot \frac{\text{sen } 6^\circ}{6^\circ} = 0,0924$$

$$\tan 5,3^\circ = 5,3 \cdot \frac{\tan 6^\circ}{6^\circ} = 0,0928$$

Los valores  $\cos \alpha$  para  $\alpha < 5,7^\circ$  y  $\text{sen } \alpha$  para  $\alpha > 84,3^\circ$  pueden leerse solo de una manera poco exacta en la regla de cálculo. Aquí ayuda como aproximación

el principio de un desarrollo en serie:  $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$  ( $\alpha$  in rad)

Ejemplos:

$$\cos 1,5^\circ = 1 - \frac{0,0262^2}{2}$$

$$= 1 - \frac{0,000686}{2}$$

$$= 1 - 0,000343 = 0,999657$$

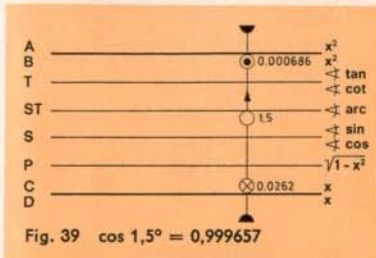


Fig. 39  $\cos 1,5^\circ = 0,999657$

Para el cálculo del miembro segundo del desarrollo en cadena se coloca el ángulo  $1,5^\circ$  con el cursor en la escala ST; en C está el valor del ángulo como radián y en B su cuadrado 0,000686. La división por 2 se hace mentalmente. Finalmente se realiza la sustracción.

$$\text{sen } 86,5^\circ = \cos 3,5^\circ = 1 - \frac{0,0611^2}{2} = 0,99813$$

### 15.2 Conversión grados $\leftrightarrow$ radianes

Se efectúa la conversión entre grados y radianes según la relación

$$\frac{\alpha}{b} = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{360^\circ}{2\pi}$$

con una colocación del cursor, porque ST es una escala fundamental desplazada por  $\frac{180}{\pi}$ . Para cada ángulo en ST se lee el radián en C, empezando con 0,0...

Enfrente de  $1^\circ$  en la escala ST se halla  $\frac{\pi}{180} = 0,01745$  en C. En dirección contraria se lee el ángulo para cada radián. Este cálculo vale no solamente para los ángulos indicados en la escala ST sino, por su división de grados decimales, a la vez para todos los ángulos, ya que el 1 puede leerse también como 0,1°, 10° etc., y por lo tanto se desplaza solamente la posición de la coma en el radián.

p. ej. a)  $0,1^\circ = 0,001745$  rad

b)  $10^\circ = 0,1745$  rad

c)  $5^\circ = 0,08725$  rad

d)  $50^\circ = 0,8725$  rad

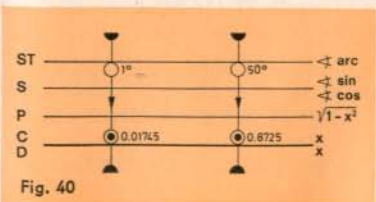


Fig. 40

Si los ángulos pequeños están indicados en minutos o segundos, se convierten éstos en valores decimales de un grado:  $1' = 1/60^\circ$  y  $1'' = 1/3600^\circ$  (véanse también cap. 15.3 y 24.1).

Mediante la colocación del 6 o 36 en la escala DF enfrente de  $1^\circ$  en ST se obtienen posiciones de tabla ventajosas para tales conversiones.

### 15.3 Las marcas $\varrho'$ y $\varrho''$

Las marcas  $\varrho'$  y  $\varrho''$  en la escala C de la reglilla simplifican la conversión en radianes, cuando los ángulos pequeños están indicados en minutos o segundos. Su significado es

$$\varrho' = \frac{180}{\pi} \cdot 60 = 3438 \quad \text{para minutos}$$

$$\varrho'' = \frac{180}{\pi} \cdot 60 \cdot 60 = 206265 \quad \text{para segundos}$$

De esta manera basta una división para la conversión grado  $\leftrightarrow$  radián:

$$\text{arc } \alpha = \frac{\alpha'}{\varrho'} = \frac{\alpha''}{\varrho''}$$

Ejemplos

$$\text{arc } 22' = \frac{22'}{\varrho'} = 0,00640 \text{ rad}$$

$$\text{arc } 400' = \frac{400'}{\varrho'} = 0,1163 \text{ rad}$$

$$\text{arc } 17'' = \frac{17''}{\varrho''} = 0,0000824 \text{ rad}$$

$$\text{arc } 380'' = \frac{380''}{\varrho''} = 0,001843 \text{ rad}$$

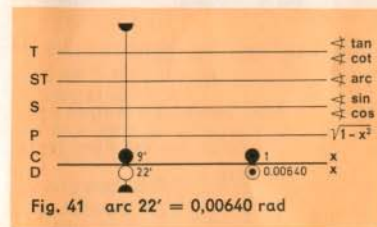


Fig. 41  $\text{arc } 22' = 0,00640 \text{ rad}$

Al emplear estas marcas  $\varrho$  se vuelve muy cómodo el cálculo con ángulos o radianes pequeños para radios cualesquiera.

$$\alpha = \frac{b}{r} \cdot \varrho, \text{ cuando se busca el ángulo}$$

$$b = \frac{\alpha \cdot r}{\varrho}, \text{ cuando se busca la longitud del radián}$$

Ejemplos:

$$\alpha = \frac{0,6}{45} \cdot \varrho' = 45,8'$$

$$b = \frac{48'' \cdot 67}{\varrho''} = 0,0156$$

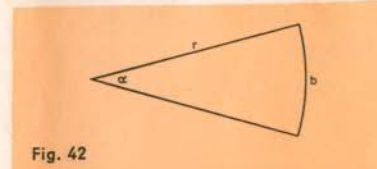


Fig. 42

### 16. El cálculo trigonométrico de triángulos planos

La ventaja de las escalas trigonométricas no reside solamente en poder leer funciones trigonométricas. Más importante es, que puede calcularse con ellas sin tener que leer los valores de las funciones.

El teorema de los senos es un típico ejemplo de la aplicación del cálculo de proporciones en la regla de cálculo:

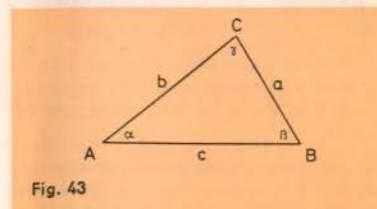


Fig. 43



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Colocando una de las relaciones, para lo cual basta graduar frente a la longitud del lado en la escala C el ángulo opuesto en la escala S, están colocadas todas las demás, de forma que puede leerse para cada lado el ángulo opuesto y recíprocamente para cada ángulo el lado opuesto.

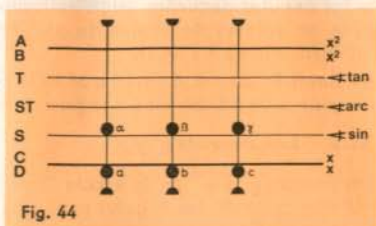


Fig. 44

El caso más frecuente en la práctica es el cálculo de triángulos rectángulos. En este caso particular es  $\gamma = 90^\circ$  y con ello  $\sin \gamma = 1$ , así como  $\sin \alpha = \cos \beta$  y  $\sin \beta = \cos \alpha$ .

El teorema de los senos tiene entonces la forma:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{1}$$

$$= \frac{a}{\cos \beta} = \frac{b}{\cos \alpha}$$

Además es:  $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

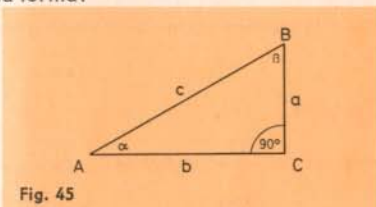


Fig. 45

Según los datos tenemos dos tipos fundamentales de cálculo:

1. Se dan dos datos cualesquiera (excepto los del caso 2).
2. Se dan los catetos a y b.

Ejemplo para el caso 1:

Datos:  $c = 5$ ,  $b = 4$  Incógnitas:  $a$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$

En primer lugar se coloca el 1 de la escala C (sen  $90^\circ = 1$ ) sobre la hipotenusa 5 de la escala D. A continuación se leen las incógnitas con solo correr el cursor.

$$\frac{5}{1} = \frac{4}{\sin 53,15^\circ} = \frac{3}{\cos 53,15^\circ}$$

$$\beta = 53,15^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ - 53,15^\circ = 36,85^\circ$$

$$a = 3$$

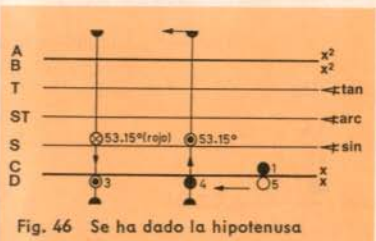


Fig. 46 Se ha dado la hipotenusa

Sobre el cateto 4 de la escala D se encuentra  $\beta = 53,15^\circ$  en la escala S (números negros). Para el siguiente paso es igual colocar  $90^\circ - 53,15^\circ = 36,85^\circ$  en la numeración negra (sen) que  $53,15^\circ$  en la numeración roja (cos), para encontrar debajo, en la escala D, el cateto 3.

Cuando los datos son un cateto y un ángulo se comienza el cálculo colocando el cateto y su correspondiente ángulo frente a frente, siendo el resto del cálculo análogo al de la fig. 46 y la hipotenusa se lee en la escala D bajo el 1 de la reglilla.

Algunas veces es mejor tomar la escala DF en vez de la D para ahorrarse el «corrimiento» de la reglilla, pero entonces las otras partes aparecen también en la escala DF y el método no varía en nada.

Ejemplo para el caso 2:

Datos:  $a = 3$ ,  $b = 4$

Incógnitas:  $c$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ .

Primeramente se calcula a partir de los catetos:

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{3}{4}$$

o mejor en forma de proporción:

$$\frac{4}{1} = \frac{3}{\tan \alpha}$$

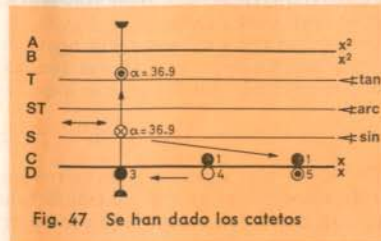


Fig. 47 Se han dado los catetos

Colocando el 1 de la reglilla sobre el 4 de la escala D y llevando el trazo del cursor sobre el 3 de la escala D se podrá leer el ángulo  $\alpha = 36,9^\circ$  en la escala T.

En la segunda parte del cálculo se usa el teorema de los senos  $\frac{c}{1} = \frac{3}{\sin 36,9^\circ}$ .

Para ello, dejando el cursor tal como está sobre el valor 3, se corre la reglilla hasta colocar el ángulo  $36,9^\circ$  de la escala S bajo el cursor, con lo cual puede leerse  $c = 5$  en la escala D bajo el 1 de la reglilla.

Para  $\alpha > 45^\circ$ , cuando  $a > b$ , el cálculo debe conducirse de la siguiente forma.

Se comienza siempre con el cateto mayor, solo que ahora se lee en la escala T el ángulo complementario (números rojos) y de forma correspondiente hay que colocar también en la escala S el coseno (números rojos).

El cálculo resulta más seguro si se dibuja el triángulo, pues con ello se evitan equivocaciones.

Los dos procesos de cálculo para triángulos rectángulos que se acaba de describir tienen particular importancia para problemas de coordenadas y vectores así como para el cálculo con números complejos. Ya que siempre se trata del problema de convertir coordenadas rectangulares a polares y viceversa.

## 16.1 Números complejos

Números complejos expresados en forma de componentes  $Z = a + ib$  se pueden sumar y restar fácilmente, mientras que para multiplicar, dividir y potenciar, es más conveniente la forma vectorial  $Z = r \cdot e^{i\varphi} = r/\varphi$ . Por este motivo resulta tan frecuente la conversión de una forma en otra.

Ejemplos:

$$Z = 4,5 + i 1,3 = 4,68/16,13^\circ$$

$$Z = 6,7/49^\circ = 4,39 + i 5,05$$

El proceso de cálculo resulta de las explicaciones anteriores sobre los triángulos rectángulos y de la fig. 49.

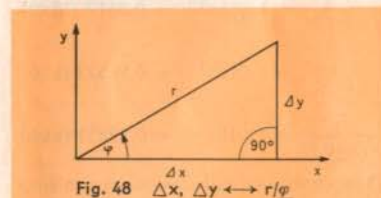


Fig. 48  $\Delta x, \Delta y \leftrightarrow r/\varphi$

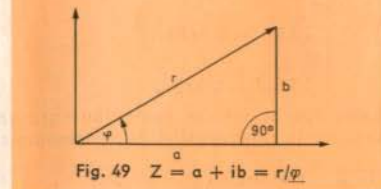


Fig. 49  $Z = a + ib = r/\varphi$

## 17. Las escalas exponenciales LL

Todas las escalas exponenciales están referidas a la escala básica D. En la ARISTO-MultiLog y en la ARISTO-HyperLog existen cuatro escalas  $e^x$  (LL0, LL1, LL2 y LL3) que alcanzan desde 1,001 hasta 100 000 y cuatro escalas  $e^{-x}$  (LL00, LL01, LL02 y LL03) que van desde 0,00001 hasta 0,999.



La ARISTO-HyperboLog tiene solo tres escalas  $e^x$  (LL1, LL2 y LL3) y tres escalas  $e^{-x}$  (LL01, LL02 y LL03).

Las escalas  $e^{+x}$  y  $e^{-x}$  son recíprocas entre sí y hay que saber que para calcular recíprocos de números menores que 2,5 (pero mayores que la unidad) se logra mayor precisión con las escalas exponenciales que con la CI o CIF.

$$\text{p. ej. } \frac{1}{1,0170} = 0,98328$$

Con las escalas exponenciales se reducen cometidos de formación de potencias y de sacar raíces en una adición o substracción de segmentos. De esa manera se puede calcular dentro de la zona potencias, raíces y logaritmos cualesquiera.

**Advertencia:** Las escalas exponenciales son escalas con colocación fija de la coma, o sea que 1,35 significa tan solo 1,35 y no 13,5 o 135 como ocurre con las escalas básicas.

## 17.1 Potencias y raíces de exponente 10 y 100

Las escalas exponenciales se han dispuesto de tal manera que el paso de una a otra contigua representa la elevación a una potencia 10 o la extracción de una raíz de este índice, según sea el sentido. La fig. 50 da una idea de las diferentes posibilidades.

Las escalas LL00 y LL0 que se encuentran en las fig. 50, 51 y 52 no sirven para el caso de la regla de cálculo ARISTO-HyperboLog.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 1,015^{0,1} &= \sqrt[10]{1,015} = 1,00149 \text{ (LL0)} \\ 1,015^1 &= 1,015 \text{ (LL1)} \\ 1,015^{10} &= 1,1605 \text{ (LL2)} \\ 1,015^{100} &= 4,43 \text{ (LL3)} \\ \frac{1}{1,015^{100}} &= 0,115^{-100} = 0,2257 \text{ (LL03)} \\ \frac{1}{1,015^{10}} &= 1,015^{-10} = 0,8617 \text{ (LL02)} \\ \frac{1}{1,015^1} &= 1,015^{-1} = 0,98522 \text{ (LL01)} \\ \frac{1}{1,015^{0,1}} &= 1,015^{-0,1} = 0,99851 \text{ (LL00)} \end{aligned}$$

Diferentes posibilidades para un mismo alineamiento:

$$\begin{aligned} \sqrt[10]{4,43} &= 1,1605 \\ \sqrt[100]{0,2257} &= 0,98522 \end{aligned}$$

Estas operaciones se presentan rara vez en la práctica pero son útiles para facilitar la comprensión del funcionamiento de las escalas exponenciales.

## 17.2 Potencias $y = a^x$

Las escalas LL se usan para elevar un número a cualquier potencia de la misma manera como se multiplica con las escalas básicas.

Marcha del cálculo:

- Con la ayuda del cursor, se coloca el extremo izquierdo (o derecho) de la escala C sobre el valor de la base «a» de la correspondiente escala exponencial LL.

$$\text{p. ej. } a = 3,2 \text{ en LL3}$$

- Se corre el cursor hasta encontrar el valor del exponente «x» en la escala C.
- Se lee la potencia bajo el cursor en la escala LL adecuada (véanse las reglas). Mediante la colocación del valor de la base se obtiene la posición para calcular una tabla de valores de la función  $y = a^x$ . La fig. 51 presenta la posición para  $y = 3,2^x$ , resolviendo el exponente 2,5 y sus variaciones decimales.

Ejemplos: Lectura en la escala

3,2 <sup>2,5</sup>	= 18,3	LL3
3,2 <sup>0,25</sup>	= 1,338	LL2
3,2 <sup>0,025</sup>	= 1,02956	LL1
3,2 <sup>0,0025</sup>	= 1,002912	LL0
3,2 <sup>-2,5</sup>	= 0,0546	LL03
3,2 <sup>-0,25</sup>	= 0,7476	LL02
3,2 <sup>-0,025</sup>	= 0,97134	LL01
3,2 <sup>-0,0025</sup>	= 0,997096	LL00

Reglas de lectura para  $y = a^x$

- Para exponentes positivos, el comienzo y el final (base y resultado) se encuentran en el mismo grupo de escala LL0-LL3 o LL00-LL03, es decir en las del mismo color. Si, por el contrario, el exponente es negativo hay que pasar de un grupo a otro (cambiar de color).
- De forma análoga a la designación de las escalas en su extremo derecho, se efectúa la lectura en la escala inmediata de índice inferior, cuando se desplaza un lugar a la izquierda la coma del exponente (ver fig. 51).
- Si el valor de la base se ha colocado con el extremo derecho de la reglilla, la lectura se efectuará en la escala contigua de índice superior (fig. 53).

Para  $0 < a < 1$  las potencias de exponentes positivos se hallan en el grupo de escalas LL00-LL03 y las de exponente negativo en el grupo de escalas LL0-LL3.

$$0,685^{2,7} = 0,36 \text{ (fig. 52)}$$

$$0,685^{-2,7} = 2,78$$

$$1,46^{2,7} = 2,78$$

$$1,46^{-2,7} = 0,36$$

La fig. 53 muestra los mismos ejemplos que la fig. 52, pero colocando el extremo derecho de la reglilla, con lo cual el resultado no se halla en la misma escala que la base, sino en la inmediata LL3 o LL03 respectivamente. Si el valor básico, como en este caso, está en el campo central de la escala, será más ventajoso en algunos casos calcular con la escala CF. Entonces está

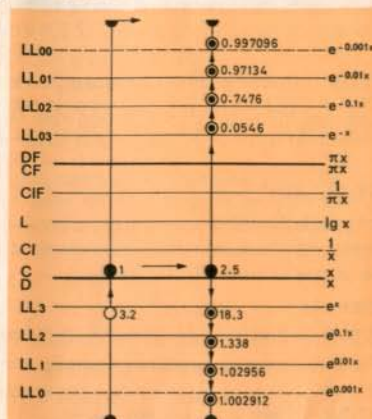


Fig. 51 Potencias

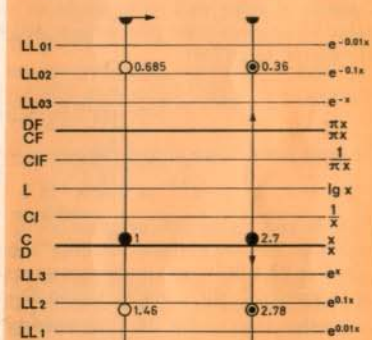


Fig. 52 Principio de C sobre la base

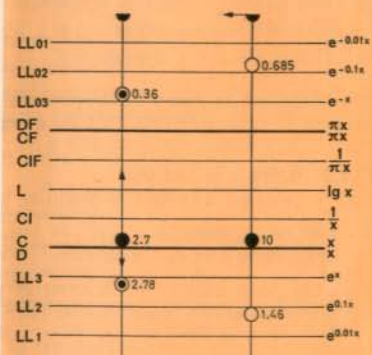


Fig. 53 Final de C sobre la base



disponible casi toda la escala CF para la colocación de los exponentes y se ahorra el «corrimiento» al formar la tabla.

El elevar potencias con las escalas exponenciales se queda muy claro, si se parte desde valores que se pueden tantear fácilmente y si se conoce las diversas escalas LL como partes de una escala exponencial continua, que tiene un hueco solamente en la zona de 0,999 hasta 1,001. Se llena este hueco mediante cálculos de aproximación (véase cap. 17.3.2 y 17.3.3).

### 17.3 Casos particulares de $y = a^x$

Las posibilidades de variación del exponente y de la base están limitadas, debido al alcance de las escalas exponenciales.

#### 17.3.1 $10^{-5} > y > 10^5$

Si el resultado de una potencia sobrepasa el alcance de las escalas exponenciales, es necesario descomponer el exponente en varios sumandos y con ello la potencia en varios factores.

Ejemplo:

$$3,14^{19} = 3,14^{6+6+7} = (3,14^6)^2 \cdot 3,14^7 = 0,955^2 \cdot 10^6 \cdot 3,02 \cdot 10^3 = 2,76 \cdot 10^9$$

Para exponentes negativos se sigue el mismo proceso.

#### 17.3.2 $0,999 < y < 1,001$

(sólo para la ARISTO-MultiLog y ARISTO-HyperLog)

Cuando el valor de una potencia es menor que 1,001 pero mayor que 0,999, debido a un exponente pequeño, el resultado no puede hallarse en las escalas LL. El desarrollo en serie

$$a^{\pm x} = 1 \pm \frac{x}{1!} \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a \pm \frac{x^3}{3!} \ln^3 a + \dots$$

da para estos casos una aproximación:

$$a^{\pm x} \approx 1 \pm x \cdot \ln a \quad \text{para} \quad |x \cdot \ln a| \ll 1$$

Cuando con ayuda del cursor se coloca el 1 de la escala C sobre la base  $a$  en la escala LL, se encontrará también sobre el valor  $\ln a$  en la escala D (véase párrafos 17.6.3), y una multiplicación por  $x$  desplazando el cursor a este valor de la escala C, da sobre la escala D la lectura  $x \cdot \ln a$ . Restando o sumando este valor intermedio de 1 se obtiene el valor de la potencia  $a^{\pm x}$  deseado. Cuanto más pequeño es el exponente, tanto más exacto es el resultado de este método.

Con ello puede continuarse el ejemplo de la fig. 51. Así se tiene p. ej.:

$$3,2^{0,00025} = 1 + 0,0002908 = 1,0002908$$

$$3,2^{-0,00025} = 1 - 0,0002908 = 0,9997092$$

Si se desplaza la coma del exponente, el resultado no difiere más que en el número de ceros o nueves después de la coma, p. ej.:  $3,2^{0,000025} = 1,00002908$ .

#### 17.3.3 $0,999 < a < 1,001$

(sólo para la ARISTO-MultiLog y ARISTO-HyperLog)

Cuando en la potencia  $y = a^x$ , la base está comprendida entre 0,999 y 1,001 se usa también una aproximación.

Según el desarrollo en serie anterior vale  $a^{\pm x} \approx 1 \pm x \cdot \ln a$ . Como « $a$ » vale aproximadamente 1, puede escribirse:  $a = 1 \pm n$ . Con lo que resulta:

$$a^{\pm x} = (1 \pm n)^x \approx 1 \pm x \cdot \ln (1 \pm n)$$

Como  $\ln (1 \pm n) = \pm n - \frac{n^2}{2} \pm \frac{n^3}{3} - \dots \approx \pm n$  (para  $|n| \ll 1$ ), queda

$$(1 \pm n)^x \approx 1 \pm nx \text{ y } (1 \pm n)^{-x} \approx 1 \mp nx \text{ (para } |nx| \ll 1)$$

Cuando el alcance de las escalas LL no es suficiente para la graduación de la base  $a$ , se usa la escala D como una escala LL, con la diferencia de que en vez de colocar  $a = 1 \pm n$ , se coloca el valor  $|n|$ .

Colocando el 1 de la escala C sobre el valor  $n$  de la escala D, la colocación es prácticamente idéntica a la de  $1 \pm n$  en una escala exponencial, por lo que puede suponerse continuación de esta con el alcance 1,001 hasta 1,001 ó 0,999 hasta 0,9999 etc. La aproximación  $\ln (1 \pm n) = n$  va siendo más exacta para valores de  $n$  decrecientes.

La potencia se forma como siempre, solamente que ahora se trata de una simple multiplicación  $n \cdot x$ . El resultado leído en D tiene que ser completado sumándolo o restándolo de 1. Si con exponentes mayores se entra en el alcance de las escalas LL existentes, se lee directamente el resultado en la escala exponencial correspondiente.

Ejemplos:

$$1,00023^{3,7} = (1 + 0,00023)^{3,7} = 1,000851 \quad \text{Sumar a 1 la lectura de la escala D}$$

$$1,00023^{37} = 1,00854 \quad \text{Lectura en la escala LL0}$$

$$0,99977^{3,7} = (1 - 0,00023)^{3,7} = 0,999149 \quad \text{Restar de 1 la lectura de la escala D}$$

$$0,99977^{37} = 0,99152 \quad \text{Lectura en la escala LL00}$$

#### 17.3.4 $0,99 < y < 1,01$

(solamente para la ARISTO-HyperboLog)

Cuando el valor de una potencia resulta comprendido entre 0,99 y 1,01, por tratarse de un exponente pequeño, el resultado no puede hallarse en las escalas LL. En tal caso se parte del siguiente desarrollo en serie:

$$a^{\pm x} = 1 \pm \frac{x}{1!} \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a \pm \frac{x^3}{3!} \ln^3 a + \dots$$

que nos lleva a la siguiente fórmula aproximada:

$$a^{\pm x} \approx 1 \pm x \cdot \ln a; \quad \text{para } |x| \ll 1$$

Mediante la ayuda del cursor se coloca el 1 de la escala C sobre la base « $a$ » en la escala LL, que en la escala D es « $\ln a$ » y ahora una multiplicación por « $x$ » desplazando el cursor a este valor de la escala C, da sobre la escala D el valor de  $x \cdot \ln a$ . Si este valor intermedio de cálculo se suma o resta de la unidad, se obtendrá la potencia buscada  $a$ . Cuando más pequeño sea el exponente más exacto es el resultado.

$$\text{Ejemplos: } 3,2^{0,0025} \approx 1 + 0,0025 \cdot \ln 3,2 = 1 + 0,002908 = 1,002908$$

$$3,2^{-0,0025} \approx 1 - 0,0025 \cdot \ln 3,2 = 1 - 0,002908 = 0,997092$$

Si se desplaza la coma del exponente, haciéndose todavía menor, el resultado no difiere más que en el número de ceros o nueves después de la coma.

$$3,2^{0,00025} = 1,0002908 \quad 3,2^{-0,00025} = 0,9997092$$

#### 17.3.5 $0,99 < a < 1,01$

(solamente para la ARISTO-HyperboLog)

Cuando en una potencia  $y = a^x$ , la base es mayor que 0,99, pero menor que 1,01 resulta también necesario usar una fórmula aproximada.

Según el anterior desarrollo en serie aquí también puede usarse  $a^{\pm x} \approx 1 \pm x \cdot \ln a$ . Como además « $a$ » es muy próximo a la unidad, conviene ponerlo en la forma  $a = 1 \pm n$ , con lo cual resulta:



$$a^x = (1 \pm n)^x \approx 1 + x \cdot \ln(1 \pm n)$$

$$\ln(1 \pm n) = \pm n - \frac{n^2}{2} \pm \frac{n^3}{3} - \dots$$

$$\ln(1 \pm n) \approx \pm n; \quad \text{para } |n| \ll 1$$

$$(1 \pm n)^x \approx 1 \pm n \cdot x; \quad \text{para } |nx| \ll 1$$

$$(1 \pm n)^{-x} \approx 1 \mp n \cdot x; \quad \text{para } |nx| \ll 1$$

Resulta, pues, indiferente, en el margen antedicho, colocar «ln(1 + n)» en la escala LL o bien «n» en la escala D, dado que  $\ln(1 \pm n) \approx \pm n$  es tanto más exacto, cuanto más pequeño es n. Cuando el alcance de la escala LL no es suficiente, puede continuarse el cálculo con la escala D como continuación de la LL, colocando en lugar del valor  $1 \pm n$ , el valor  $\pm n$ .

Colocando el 1 de la escala C, frente al n de la escala D, se tiene lo mismo que si se tratara de leer  $\ln(1 \pm n)$  sobre una exponencial prolongada de alcance 1,001 a 1,01 y 0,99 a 0,999 etc. A continuación el cálculo se hace de la forma habitual para la elevación a potencias. Todos los resultados leídos en la escala D, son fundamentalmente resultado de una multiplicación que ha de complementarse por la adición de 1.

Así que el exponente va aumentando, llega un momento en que el resultado ya puede leerse en las escalas exponenciales correspondientes.

Ejemplos: Lectura en escala  
 $1,0023^{3,7} = (1 + 0,0023^{3,7}) = 1,00851$  D y añadir 1  
 $1,0023^{37} = 1,0888$  LL1  
 $0,9977^{3,7} = (1 - 0,0023)^{3,7} = 0,99149$  D y restar de 1  
 $0,9977^{37} = 0,9184$  LL01

Si se coloca el cursor sobre el extremo inicial de la escala D, entonces se obtiene una idea del error máximo que puede cometerse en estos cálculos aproximados observando la discrepancia existente con el valor 1,01 de la escala LL1, para la ARISTO-HyperboLog y la mucho más pequeña con el 1,001 de la escala LL0 de la ARISTO-MultiLog y ARISTO-HyperLog. De aquí resulta que el salto de las escala LL a la D se realiza con la precisión de la regla de cálculo para el caso de la ARISTO-MultiLog y de la ARISTO-HyperLog. Como que en la ARISTO-HyperboLog faltan las escalas LL0, no es tan exacto el paso sino que se cometen unos pequeños errores.

Cuando se usa la escala básica D en vez de la escala exponencial exacta en el margen 1,001 a 1,01, puede mejorarse la precisión del cálculo incluyendo en la fórmula aproximada el término cuadrático:

A)  $\ln(1 \pm n) = \mp n(1 \pm n/2)$  al poner la base en la escala D  
 B)  $e^{\pm x} = 1 \pm x(1 \pm x/2)$  al leer la potencia en la escala D

Si el resultado fuese leído en una escala exponencial, bastará corregir el comienzo sobre la escala D con la fórmula A). Cuando todo el cálculo se hace con la escala D, hay que efectuar ambas correcciones, A) y B).

Ejemplo:  $1,0023^{3,7} = 1,00854$

$0,0023(1 - 1/2 \cdot 0,0023) = 0,0023 \cdot 0,99885 = 0,002297$  que se colocará en la escala D en vez de  $n = 0,0023$  con el 1 de la reglilla.

La elevación a potencia  $1 + 0,002297 \cdot 3,7$  da ahora 1,00850. Como la lectura se ha efectuado en la escala D es necesario corregir con la fórmula B):

$$0,00850(1 + 1/2 \cdot 0,00850) = 0,00850 \cdot 1,00425 = 0,00854.$$

Después de añadir la unidad el resultado es 1,00854 (el valor exacto es 1,0085362). Este cálculo parece complicado a primera vista, pero, tras haberlo practicado, es muy sencillo y las correcciones pueden efectuarse a «simple vista». Estas

correcciones no son necesarias cuando la base es  $< 1,001$ , porque en tales casos la corrección es inferior a la precisión de la regla de cálculo.

#### 17.4 Potencias $y = e^x$

$y = e^x$  es un caso especial de cálculo con la reglilla en su posición inicial, ya que entonces la base es el número  $e = 2,718$ . Como sea que la escala D tiene constantemente con respecto a las escalas exponenciales esta colocación, basta la graduación del exponente, mediante el cursor, sobre la escala D para efectuar la lectura de la potencia de base e en la escala LL. Colocando el cursor sobre el valor 1,489 de la escala D, pueden leerse los siguientes valores:

$e^{1,489} = 4,43$	$e^{-1,488} = 0,2260$
$e^{0,1489} = 1,1605$	$e^{-0,1489} = 0,8618$
$e^{0,01489} = 1,015$	$e^{-0,01489} = 0,98523$
$e^{0,001489} = 1,001489$	$e^{-0,001489} = 0,998513$

Con más variación se logra la coincidencia con  $e^{\pm x} \approx 1 \pm x$ .

$$e^{0,0001489} = 1,0001489$$

#### 17.5 Raíces $a = \sqrt[x]{y}$

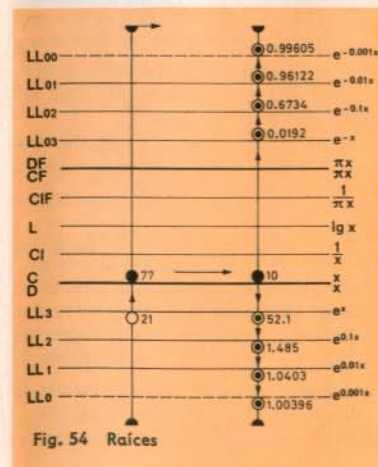
Con las escalas exponenciales pueden sacarse raíces con radicandos cualesquiera. El sacar raíces, la inversión de elevar potencias se parece al método de la división con las escalas LL y la escala fundamental C. Si se coloca la potencia  $3,2^{2,5} = 18,3$ , según el párrafo 17.2, puede leerse en dirección contraria  $\sqrt[2,5]{18,3} = 3,2$ .

##### Método del cálculo:

- Se coloca el radicando y en la escala LL frente al exponente de la raíz x en C.
- Lectura del valor de la raíz a debajo del principio o final de la reglilla en la escala LL correspondiente.

Las reglas de lectura del capítulo 17.2 encuentran también aquí una aplicación análoga. En ello hay que cuidar de que la lectura debe efectuarse debajo del final derecho de la reglilla en la escala exponencial colindante con la numeración más pequeña LL0—LL3 o LL00—LL03.

$0,77$	$\frac{1}{0,77} = 0,0192$
$\sqrt[0,77]{21} = 52,1$	$\frac{1}{\sqrt[0,77]{21}} = 0,0192$
$7,7$	$\frac{1}{7,7} = 0,0129$
$\sqrt[7,7]{21} = 1,485$	$\frac{1}{\sqrt[7,7]{21}} = 0,6734$
$77$	$\frac{1}{77} = 0,0129$
$\sqrt[77]{21} = 1,0403$	$\frac{1}{\sqrt[77]{21}} = 0,96122$
$770$	$\frac{1}{770} = 0,00129$
$\sqrt[770]{21} = 1,00396$	$\frac{1}{\sqrt[770]{21}} = 0,99605$





Expresiones de raíces pueden transformarse en potencias para un entendimiento mejor. Se colocan entonces los exponentes en la escala CI, o si la base es  $e$ , en DI.

En el ejemplo siguiente debe colocarse el cursor sobre 3,5 en DI y leerse en LL2 o LL02.

$$\sqrt[3,5]{e} = e^{+\frac{1}{3,5}} = 1,3307 \text{ en LL2}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3,5]{e}} = e^{-\frac{1}{3,5}} = 0,7514 \text{ en LL02}$$

## 17.6 Logaritmos

### 17.6.1 Logaritmos de base cualquiera

Con las escalas exponenciales puede hallarse cualquier tipo de logaritmos. Los logaritmos resultan de la inversión de la potenciación. El camino que se sigue puede verse mejor escribiendo la potencia y su inversa:

$$y = a^x \quad x = \log_a y \text{ (léase: logaritmo y en base a)}$$

Luego la determinación de un logaritmo coincide con la solución de una potencia, en la que se busca el exponente.

#### Proceso de cálculo:

- Colocación del cursor sobre el valor  $a$  de la base en la escala LL.
- Colocación del extremo inicial o final de la reglilla bajo la raya del cursor.
- Graduación del número  $y$  en la escala LL, mediante la raya del cursor.
- Lectura del logaritmo bajo la raya del cursor en la escala C.

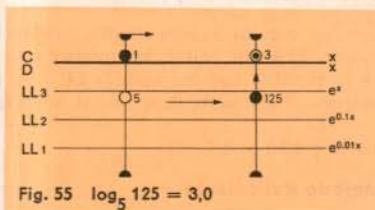


Fig. 55  $\log_5 125 = 3,0$

La colocación de la coma se halla mediante la relación:  $\log_a a = 1$ .

Colocando el extremo inicial de la reglilla sobre la base  $a$ , entonces los logaritmos a la derecha del valor  $a$  serán mayores que 1 y a la izquierda menores que 1.

#### Reglas para la lectura:

- Todo paso a la escala LL contigua — en el orden LL3, LL2, LL1, LL0, LL03, LL02, LL01, LL00 — hace que la coma en el logaritmo se corra un lugar a la izquierda y en el orden contrario un lugar a la derecha.
- Los logaritmos serán positivos (negativos), cuando el número y la base están graduados en escalas LL de igual (distinto) color.

Ejemplos para practicar:

$$\begin{aligned} \log_2 16 &= 4,0 \\ \log_2 1,02 &= 0,02857 \\ \log_2 0,25 &= -2 \end{aligned}$$

### 17.6.2 Logaritmos decimales

Colocando el 1 de la escala C sobre la base 10 de la escala LL3, pueden leerse en la escala C los logaritmos decimales de cualquier número graduado en la escala LL (fig. 56 y 58).

Dado que los logaritmos decimales son de uso muy frecuente, se encuentra además en la reglilla la escala L, que

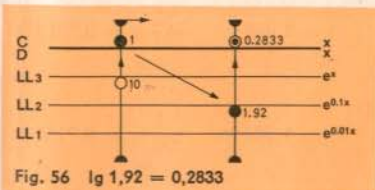


Fig. 56  $\lg 1,92 = 0,2833$

solamente indica las mantisas, de los números graduados en C. Al igual que cuando se usa la tabla de logaritmos, se halla la característica según la regla «número de cifras menos 1» y se suma a la mantisa. Por lo tanto sobre cada valor de la escala C se encuentra su logaritmo y recíprocamente para cada logaritmo puede leerse directamente su número.

Para el uso de la escala L, se mueve solamente el cursor, por lo que los logaritmos decimales se encuentran con mayor facilidad que mediante las escalas LL. Por el contrario el resultado para el alcance de la escala LL1 es más exacto.

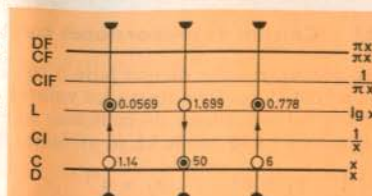


Fig. 57 Logaritmos decimales con L/C

Ejemplo:

$$\lg 1,03 = 0,01283 \text{ con la escala LL1}$$

$$\lg 1,03 = 0,013 \text{ con la escala L}$$

Ejemplos para practicar:

$$\begin{aligned} \log_{10} 50 &= 1,699 \\ \log_{10} 2 &= 0,301 \\ \log_{10} 1,03 &= 0,01283 \\ \log_{10} 0,015 &= -1,824 \\ \log_{10} 0,5 &= -0,3010 \\ \log_{10} 0,1 &= -1 \\ \log_{10} 6 &= 0,778 \\ \log_{10} 1,14 &= 0,0569 \\ \log_{10} 1,015 &= 0,00647 \end{aligned}$$

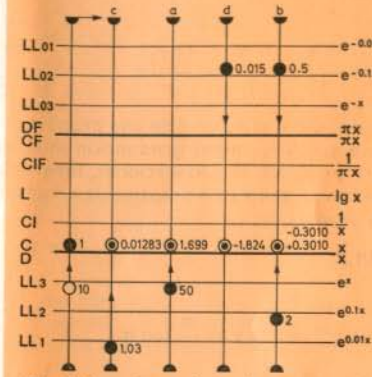


Fig. 58 Logaritmos decimales

Al graduar con el extremo izquierdo de la escala C se encuentran todas las lecturas a la izquierda del valor básico y son por tanto  $< 1$ , p. ej.  $\log_{10} 9 = 0,954$ . Los logaritmos de números  $< 1$  son negativos.

### 17.6.3 Logaritmos naturales

Los logaritmos naturales de base  $e$  se encuentran al pasar de las escalas exponenciales a la escala fundamental D (fig. 59).

Ejemplos para practicar:

$$\begin{aligned} \ln 4,375 &= 1,475 \\ \ln 0,622 &= -0,475 \\ \ln 0,05 &= -2,994 \end{aligned}$$

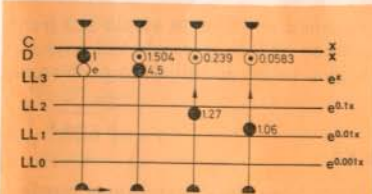


Fig. 59  $\ln 4,5 = 1,504$   
 $\ln 1,27 = 0,239$   
 $\ln 1,06 = 0,0583$

## 18. Otras aplicaciones de las escalas exponenciales

Hasta ahora solamente se ha usado la escala C de la reglilla en combinación con las escalas exponenciales, para enseñar las relaciones esenciales del cálculo. Naturalmente pueden encontrar aplicación otras escalas de la reglilla, cuya relación funcional con la escala C se ha explicado en capítulos anteriores; p. ej. puede graduarse la potencia  $a^{\sqrt{x}}$  mediante la escala B. Además es muy práctica la escala S de la reglilla para el cálculo de  $e^{\text{sen } x}$ . También las inversiones presentan otras posibilidades para el cálculo logarítmico. Al calcular

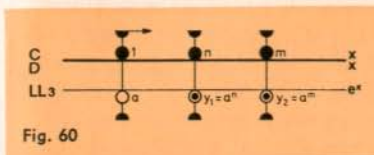


con las escalas LL puede usarse la escala CF en vez de la escala C, para evitar el «corrimiento» de la reglilla en el cálculo de tablas, cuando la base se encuentra aproximadamente en el centro de la regla.

### 18.1 Cálculo de proporciones con las escalas exponenciales

Si se gradúa el valor de una base  $a$  con el extremo inicial de la escala C sobre una escala LL, pueden leerse los valores de las potencias para cualquier exponente o los logaritmos de cualquier número para esa base. Luego la base  $a$  graduada en una escala LL es un factor de proporcionalidad.

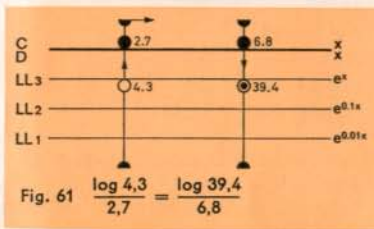
$$\begin{aligned} 18.1.1 \quad y_1 &= a^n & y_2 &= a^m \\ \log y_1 &= n \cdot \log a & \log y_2 &= m \cdot \log a \\ \frac{\log a}{1} &= \frac{\log y_1}{n} = \frac{\log y_2}{m} \\ \text{resp. } \frac{\ln a}{1} &= \frac{\ln y_1}{n} = \frac{\ln y_2}{m} \end{aligned}$$



Conocidos tres valores de una proporción, puede calcularse el cuarto, obteniéndose con la primera graduación múltiples proporciones más. Se presenta así otro principio de proporciones, favorable para el cálculo con la regla, dependiendo su aplicación únicamente en pasar los problemas indicados a esta forma de proporción.

#### 18.1.2

$$\begin{aligned} y &= a^{\frac{m}{n}} \rightarrow \log y = \frac{m}{n} \log a \\ \frac{\log y}{m} &= \frac{\log a}{n} \\ y &= 4,3^{\frac{6,8}{2,7}} \rightarrow \frac{\log y}{6,8} = \frac{\log 4,3}{2,7} \end{aligned}$$



Colocando el 4,3 de la escala LL3 frente al 2,7 de la escala C, puede leerse el resultado 39,4 en la escala LL2 bajo el 6,8 de C.

De igual forma se resuelven problemas parecidos:

$$y = \sqrt[2,7]{4,3^{6,8}} \quad \text{o} \quad y^{2,7} = 4,3^{6,8}$$

#### 18.1.3

Muchas leyes de la naturaleza pueden llevarse a esta forma de proporción, si la variación (diferencia) de una de las variables es proporcional a la diferencia de los logaritmos de la otra:

$$\log y_2 - \log y_1 = \text{const} (x_2 - x_1)$$

$$\text{Además es} \quad \log a - \log b = \log \frac{a}{b}$$

Por lo que puede escribirse:

$$\log \frac{y_2}{y_1} = \text{const} (x_2 - x_1)$$

Una variación de  $x_1$  a  $x_2$  en el intervalo  $i$ , trae como consecuencia una variación de  $y_1$  a  $y_2$ .

Llamando  $r$  a la relación  $\frac{y_1}{y_2}$ , es decir, la fracción que queda de la cantidad inicial, la ecuación se convierte en:

$$\frac{\log r}{i} = \text{const} = \frac{\log r_1}{i_1} = \frac{\log r_2}{i_2} = \dots$$

Ejemplo: Desintegración radiactiva.

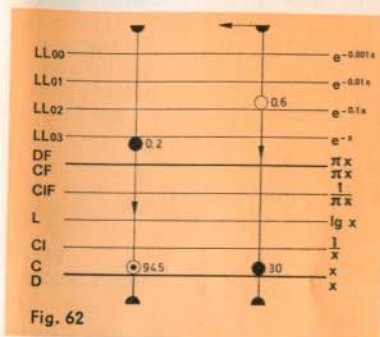
Un elemento se desintegra en 30 días un 40%, quedando el 60%. Al cabo de cuánto tiempo existirá solamente el 20%?

$$i_1 = 30$$

$$r_1 = 0,6$$

$$r_2 = 0,2$$

$$\frac{\log 0,6}{30} = \frac{\log 0,2}{x} \quad x = 94,5 \text{ días}$$



#### 18.1.4

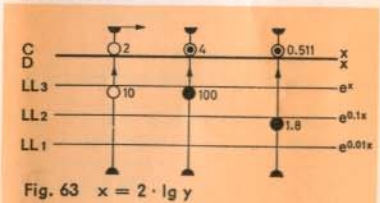
Si se desea multiplicar un logaritmo por una cifra constante, se gradúa frente a la constante en la escala C la base del logaritmo en la escala LL, obteniendo así una disposición tabular que permite hallar las multiplicaciones de la constante con los logaritmos de la base graduada.

Se escribe  $x = c \cdot \log_a y$  en forma de proporción:

$$\frac{x}{\log_a y} = \frac{c}{1} = \frac{c}{\log_a a}$$

$$2 \cdot \log_{10} 100 = 4$$

$$2 \cdot \log_{10} 1,8 = 0,511$$



Se puede multiplicar todos los logaritmos de la base 10 según fig. 63 con el factor 2, con las escalas LL0 también los logaritmos de valores  $< 1$ .

En la física y en la técnica de telecomunicaciones es frecuentemente necesario calcular los decibelios (dB) correspondientes a una relación de voltaje dada:

$$\text{dB} \triangleq 20 \lg \frac{A_1}{A_2}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 20 \text{ dB} &= 20 \lg 10 \\ 40 \text{ dB} &= 20 \lg 100 \\ 5,11 \text{ dB} &= 20 \lg 1,8 \end{aligned}$$

### 19. Las funciones hiperbólicas

(sólo para ARISTO-HyperboLog y ARISTO-HyperLog)

Las escalas Sh1, Sh2, Ch y Th se refieren como todas las escalas de función angular a la escala D. Para cada colocación del argumento en Sh, Ch o Th puede leerse el valor funcional correspondiente en D. En las escalas de las



funciones hiperbólicas no están indicados los argumentos en grados sino en radianes. El paso de grados a radianes y viceversa será realizado con las escalas C y ST de acuerdo con el método descrito en el capítulo 15.2.

Al igual que con las escalas trigonométricas, S y T pueden multiplicar y dividirse con las escalas Sh1, Sh2, Ch y Th de una manera discrecional, así que se puede calcular con la regla también expresiones de la forma  $Sh x \cdot \cos$  y etc.

## 19.1 Las escalas Sh1 y Sh2

Para todos los argumentos  $x$ , de 0,1 hasta 0,881, colocados, en Sh1 puede desprenderse de la escala D los valores funcionales  $Sh x$ , de 0,1 hasta 1,0. Con ayuda de la escala de continuación Sh2, resultan análogos los valores funcionales  $Sh x$  de 1 hasta 10 para los argumentos  $x$  de 0,85 hasta 3,0.

Para  $x > 3$  vale  $Sh x \approx \frac{e^x}{2}$ ,

para  $x < 0,1$  vale  $Sh x \approx x$

Ejemplos:

1)  $Sh 0,349 = 0,356$

2)  $Sh 0,885 = 1,005$

3)  $Sh 1,742 = 2,77$

Realizando las operaciones en sentido inverso se encuentra, naturalmente, el argumento en radianes a partir de un valor dado de la función.

$Sh x = 2,77$  corresponde  
 $x = \text{Arg } Sh 2,77 = 1,742$

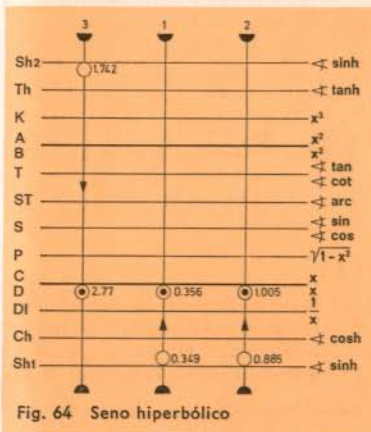


Fig. 64 Seno hiperbólico

## 19.2 La escala Ch (sólo para ARISTO-HyperLog)

Para cada argumento  $0 < x < 3$  colocado en la escala Ch, se desprende el valor funcional  $Ch x$  de la escala D en la zona 1 hasta 10. Para  $x < 0,1$  se convierte  $\cosh x \approx 1$  y para  $x > 3$  se convierte  $Ch x \approx \frac{e^x}{2} \approx Sh x$ .

Ejemplos:

1.  $Ch 0,437 = 1,097$

2.  $Ch 0,163 = 1,013$

3.  $Ch 1,5 = 2,352$

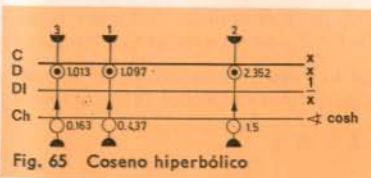


Fig. 65 Coseno hiperbólico

Las escalas H1 y H2 ofrecen en combinación con las escalas Sh1 y Sh2 otra posibilidad más para la lectura del coseno hiperbólico, de acuerdo con la fórmula

$$Ch x = \sqrt{1 + Sh^2 x}$$

Para cada argumento colocado en la escala Sh está el valor funcional en D y para cada valor  $x$  en la escala D está  $\sqrt{1 + x^2}$  en la escala H. Por consiguiente está enfrente de cada colocación del argumento  $x$  en la escala Sh el  $\cosh x$  en la escala H.

Enfrente de la zona  $0,1 < x < 1,0$  en

D está  $1,005 < \sqrt{1 + x^2} < 1,41$  en H1, enfrente de la zona  $1,0 < x < 10$  en D

está  $1,41 < \sqrt{1 + x^2} < 10,06$  en H2.

Una comparación con las indicaciones en cap. 19.1 demuestra, que en la lectura del coseno hiperbólico trabajan en combinación las escalas Sh1 y H1 así como Sh2 y H2. Si la colocación en la parte izquierda de la escala Ch queda insegura, dan una mayor exactitud las escalas Sh1 y H1. Cumpelen prácticamente una colaboración similar a la de las escalas S y P.

La fig. 66 da ejemplos de lectura en comparación con la fig. 65.

$Ch 0,437 = 1,0971$

$Ch 1,5 = 2,352$

$Ch 0,163 = 1,0133$

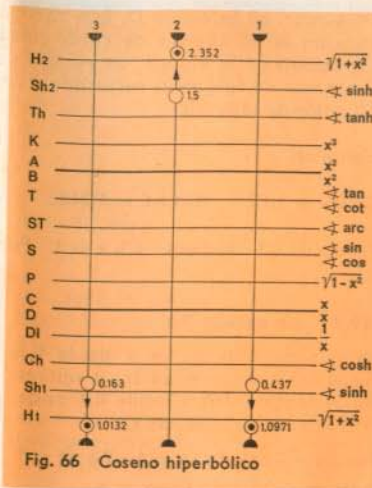


Fig. 66 Coseno hiperbólico

### 19.2.1 Ch x (sólo ARISTO HyperboLog)

El cálculo del coseno hiperbólico en la ARISTO HyperboLog es algo más complicado, siendo posibles varios caminos:

a)  $Ch x = \frac{Sh x}{Tgh x}$  b)  $Ch x = \sqrt{Sh^2 x + 1}$

c)  $Ch x = 1 + 2 \left( Sh \frac{x}{2} \right)^2$

La figura 67 muestra el camino a seguir para  $Ch 0,437$  cuando se hace mediante la división  $Sh x : Tgh x$ . El cálculo comienza colocando el denominador  $Tgh x$ , es decir con la ayuda del cursor se coloca el extremo inicial o final de la reglilla frente al valor del argumento leído en la escala Th. Encima de este mismo argumento, leído ahora en la escala Sh, se encuentra en la escala C el valor de la función  $Ch x$ .

$Ch 0,437 = \frac{Sh 0,437}{Tgh 0,437} = 1,097$

Escrito como proporción:

$\frac{Tgh 0,437}{1} = \frac{Sh 0,437}{Ch 0,437}$

Como ejemplo del segundo camino tomamos el cálculo

$Ch 1,5 = \sqrt{Sh^2 1,5 + 1} = 2,352$

Siguiendo el esquema de la fig. 68 vemos que se coloca el cursor sobre el argumento  $x = 1,5$  leído en la escala Sh 2, con lo cual se lee en A el valor de  $Sh^2 x$ . A esta lectura se suma mentalmente la unidad y se efectúa el desplazamiento del cursor al valor  $Sh^2 x + 1$ , leído en la misma escala A; ahora se lee la solución, bajo el trazo

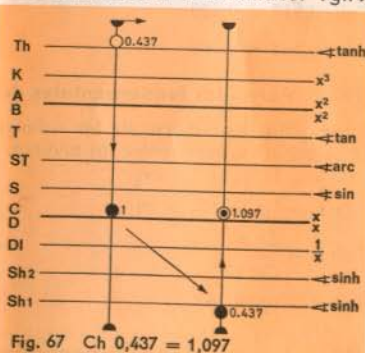


Fig. 67  $Ch 0,437 = 1,097$

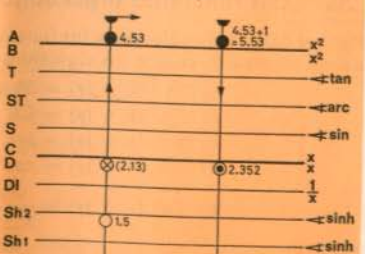


Fig. 68  $Ch 1,5 = 2,352$



del cursor, en la escala D. Este camino es sencillo pero exige poner especial atención en el número de cifras enteras del cuadrado con el fin de sumar correctamente la unidad. La ventaja de este segundo camino consiste en que el proceso de cálculo es reversible y sirve para calcular el argumento a partir del valor de la función.

Ejemplos:

$$\text{Ch } 0,2 = 1,02; \quad \text{Ch } 1,0 = 1,543; \quad \text{Arg Ch } 2,5 = \text{Arg Sh } \sqrt{2,5^2 - 1} = 1,567$$

$$\text{Para } x < 0,1 \text{ se tiene } \text{Ch } x \approx 1 \quad \text{Para } x > 3 \text{ se tiene } \text{Ch } x \approx \frac{e^x}{2}$$

### 19.3 La escala Th

sirve para argumentos  $x$  desde 0,1 hasta 3,0, que corresponden a valores de la función  $\text{Tgh } x$  desde 0,1 hasta 0,995 leídos en la escala D.

$$\text{Para } x > 3 \text{ vale } \text{Tgh } x \approx 1 - 2e^{-2x} \approx 1$$

$$\text{para } x < 0,1 \text{ vale } \text{Tgh } x \approx x$$

$$\text{Ejemplos: } \text{Tgh } 0,257 = 0,251 \\ \text{Tgh } 1,614 = 0,924$$

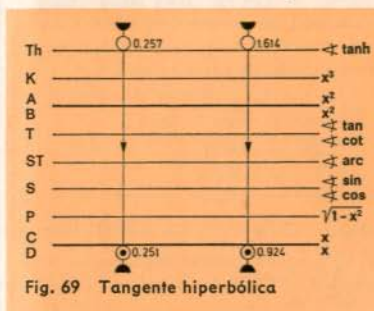


Fig. 69 Tangente hiperbólica

Al valor funcional  $\text{Ctgh } x$  se le desprende, según la relación  $\text{Ctgh } x = \frac{1}{\text{Tgh } x}$  de la escala DI, si  $x$  está colocado en la escala Th.

Ejemplos:

$$\text{Tgh } 0,549 = 0,500$$

$$\text{Para } x < 0,1 \text{ vale } \text{Ctgh } x \approx \frac{1}{x}$$

$$\text{Ctgh } 0,549 = 2,000$$

$$\text{Para } x > 3 \text{ vale } \text{Ctgh } x \approx 1$$

### 19.4 Fórmulas fundamentales de las funciones hiperbólicas

Para hallar los valores de las cofunciones hiperbólicas es necesario conocer la relación existente entre las diversas funciones hiperbólicas

$$\text{Sh } x = \frac{1}{2}(e^{+x} - e^{-x})$$

$$\text{Sh } x + \text{Ch } x = e^x$$

$$\text{Ch } x = \frac{1}{2}(e^{+x} + e^{-x})$$

$$-\text{Sh } x + \text{Ch } x = e^{-x}$$

$$\text{Tgh } x = \frac{\text{Sh } x}{\text{Ch } x}$$

$$\text{Tgh } x = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\text{Tgh } x \cdot \text{Ctgh } x = 1$$

$$\text{Ch}^2 x - \text{Sh}^2 x = 1$$

### 20. Las funciones hiperbólicas de argumento complejo

Para el cálculo de valores de las funciones hiperbólicas de argumento complejo, deben tenerse en cuenta las siguientes fórmulas tomadas de la literatura:

$$\text{a) } \text{Sh } (x \pm jy) = \text{Sh } x \cdot \cos y \pm j \cdot \text{Ch } x \cdot \sin y$$

$$\text{b) } \text{Ch } (x \pm jy) = \text{Ch } x \cdot \cos y \pm j \cdot \text{Sh } x \cdot \sin y$$

$$\text{c) } \text{sen } (x \pm jy) = \text{sen } x \cdot \text{Ch } y \pm j \cdot \cos x \cdot \text{Sh } y$$

$$\text{d) } \cos (x \pm jy) = \cos x \cdot \text{Ch } y \mp j \cdot \sin x \cdot \text{Sh } y$$

$$\text{e) } \text{Tgh } (x \pm jy) = \frac{\text{Tgh } x \pm j \cdot \tan y}{1 \pm j \cdot \text{Tgh } x \cdot \tan y}$$

$$\text{f) } \tan (x \pm jy) = \frac{\tan x \pm j \cdot \text{Tgh } y}{1 \mp j \cdot \tan x \cdot \text{Tgh } y}$$

Al calcular con estas fórmulas debe tenerse en cuenta que los argumentos de las funciones en cuestión pueden venir dados tanto en grados como en radianes. Las fórmulas (a) hasta (d) rinden directamente la función compleja en la forma de componentes  $a + jb$ . La cual puede transformarse en la forma polar  $r/\varphi$  en la forma acostumbrada (ver cap. 16 y 16.1).

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \text{Sh } (0,25 + j 12,7^\circ) &= \text{Sh } 0,25 \cdot \cos 12,7^\circ \pm j \cdot \text{Ch } 0,25 \cdot \sin 12,7^\circ \\ &= 0,2526 \cdot 0,976 + j \cdot 1,031 \cdot 0,2198 \\ &= 0,2464 + j \cdot 0,2267 \\ &= 0,335/42,6^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sen } (1,05 + j 0,61) &= \text{sen } 60,2^\circ \cdot \text{Ch } 0,61 + j \cdot \cos 60,2^\circ \cdot \text{Sh } 0,61 \\ &= 1,035 + j 0,322 = 1,083/17,3^\circ \end{aligned}$$

Cálculo intermedio:  $1,05$  radianes  $= 60,2^\circ$ .

Naturalmente no se leen los valores individuales de todas las funciones, sino que se multiplica todo seguido con la colocación de las escalas; a pesar de esto el cálculo resulta más bien lento, principalmente por lo poco cómodo del cálculo de  $\text{Ch}$ . A continuación se indica un método que permite efectuar el cálculo con más rapidez.

### 20.1 Sh ( $x + jy$ )

La fórmula  $\text{Sh } (x + jy) = \text{Sh } x \cdot \cos y + j (\text{Ch } x \cdot \sin y)$  permite ser representada, como es sabido, en forma vectorial cuyos dos componentes son (fig. 68):

$$a = \text{Sh } x \cdot \cos y$$

$$b = \text{Ch } x \cdot \sin y$$

A partir del triángulo de la fig. 70 puede calcularse:

$$\tan \varphi = \frac{\text{Ch } x \cdot \sin y}{\text{Sh } x \cdot \cos y}, \quad \tan \varphi = \frac{\tan y}{\text{Tgh } x}$$

Esto corresponde a un triángulo semejante al de la fig. 71 (el mismo ángulo  $\varphi$ ), pero los lados son ahora  $\tan y$  y  $\text{Tgh } x$ .

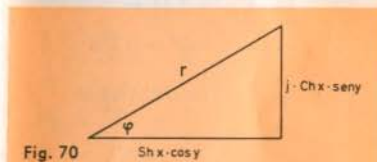


Fig. 70

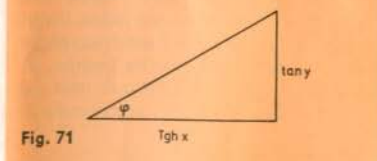


Fig. 71

La nueva fórmula no contiene el indeseado valor  $\text{Ch } x$  y permite un cálculo más rápido de los valores buscados  $\varphi$  y  $r$ , pues al conocer  $\varphi$  por la ecuación de  $\tan \varphi$ , se tiene:

$$r = \frac{\text{Sh } x \cdot \cos y}{\cos \varphi}$$

Esta ecuación se puede leer también de la fig. 70 y elevando al cuadrado los lados de dicho triángulo se tiene para comprobación:  $r^2 = \text{Sh}^2 x + \text{sen}^2 y$ .

El problema de la división  $\tan \varphi = \frac{\tan y}{\text{Tgh } x}$ , sencillo en sí, presenta alguna dificultad cuando se busca el camino más corto, porque resultan diferentes colocaciones según el valor de los argumentos  $\varphi$  e  $y$ .



El mejor método de evitar errores en la lectura es aquí una operación aproximada con valores redondeados.

Ejemplo:  $Sh(0,25 + j 12,7^\circ)$

Un vistazo a las escalas Th y T indica que  $\tan 12,7^\circ$  queda a la izquierda de Tgh 0,25 o sea que es menor. Por tanto  $\tan \varphi < 1$  y  $\varphi < 45^\circ$ .

$$\tan \varphi = \frac{\tan 12,7^\circ}{Tgh 0,25} \text{ o, pasando a proporción } \frac{Tgh 0,25}{\tan 12,7^\circ} = \frac{1}{\tan \varphi}$$

Esta última forma es más apropiada para la regla de cálculo, pues basta colocar uno sobre otro los valores 0,25 de la escala Th y el  $12,7^\circ$  de la escala T, para leer  $\varphi$  en la escala T sobre el final del cuerpo.

$$\tan \varphi = \frac{\tan 12,7^\circ}{Tgh 0,25}$$

Cálculo aproximado:

$$\tan \varphi \approx \frac{0,2}{0,25} \approx 0,8 \quad \varphi \approx 40^\circ$$

$$r = \frac{Sh 0,25}{\cos 42,6^\circ} \cdot \cos 12,7^\circ = 0,335$$

comprobación:

$$r = \sqrt{Sh^2 0,25 + \sin^2 12,7^\circ}$$

$$r = \sqrt{0,0484 + 0,0639} = 0,335$$

Resultado:

$$Sh(0,25 + j 12,7^\circ) = 0,335 / 42,6^\circ$$

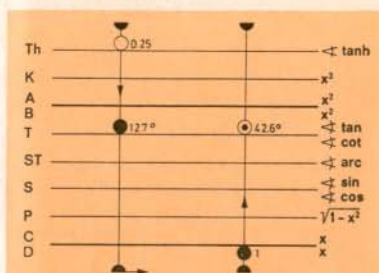


Fig. 72  $\varphi = 42,6^\circ$

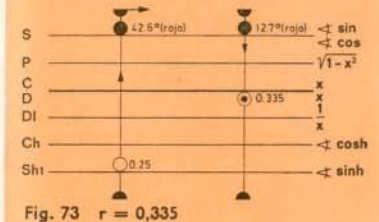


Fig. 73  $r = 0,335$

Para hacer posible esta rápida solución para todas las combinaciones de ángulos, se han resumido todas las posiciones y lecturas en la tabla que sigue. El que tenga que efectuar frecuentemente tales cálculos, dominará pronto el método y ahorrará mucho tiempo. El que tenga que realizarlos solo de tarde en tarde, llegará al final con más seguridad si lee primero los valores de las funciones Tgh x y tan y, efectuando después la división.

$$\text{Cálculo de } \tan \varphi = \frac{\tan y}{Tgh x}$$

y	x	1ª posición "y" en	2ª posición cursor	lectura $\varphi$	$\varphi$
5,5°—45°	Tgh x > tan y	T bajo x en Th	en extremo final D	en T	< 45°
5,5°—45°	Tgh x < tan y	T bajo x en Th	en extremo final C, después reglilla en posición básica	en T (rojo)	> 45°
< 5,5°	Tgh x < 10 · tan y	ST bajo x en Th	sobre extremo inicial D	en T	> 5,5°
< 5,5°	Tgh x > 10 · tan y	ST bajo x en Th	sobre extremo final D	en ST	< 5,5°
> 45°	10 · Tgh x > tan y	T (rojo) sobre final escala D	en x de Th	en T (rojo)	> 45°
> 45°	10 · Tgh x < tan y	T (rojo) sobre inicial escala D	en x de Th	en ST (sentido inverso)	> 45°

El cálculo de la hipotenusa

$$r = \frac{Sh x}{\cos \varphi} \cdot \cos y$$

no ofrece dificultad, si se atiende a que los valores de los cosenos deben colocarse en la escala S usando la numeración roja.

Ejemplos de aplicación de la tabla anterior:

1.

$$Sh(0,361 + j 11,8^\circ) = 0,422 / 31,12^\circ$$

$$Tgh 0,361 > \tan 11,8^\circ$$

$$\varphi = 31,12^\circ$$

$$r = \frac{Sh 0,361}{\cos 31,12^\circ} \cdot \cos 11,8^\circ$$

$$r = 0,422$$

2.

$$Sh(0,38 + j 32^\circ) = 0,657 / 59,87^\circ$$

$$Tgh 0,38 < \tan 32^\circ$$

$$\varphi = 59,87^\circ$$

Colocar uno sobre otro Tgh 0,38 y  $\tan 32^\circ$ , correr el cursor hasta el extremo final de la reglilla, encontrando así en la escala DI el valor  $\tan \varphi = 1,725$ . Dejando ahora el cursor en esta posición, llevar la reglilla a la posición básica, para poder leer en la escala T el ángulo  $\varphi = 59,87^\circ$ .

3.

$$Sh(0,262 + j 4,52^\circ) = 0,2764 / 17,13^\circ$$

$$Tgh 0,262 < 10 \cdot \tan 4,52^\circ$$

$$\varphi = 17,13^\circ$$

4.

$$Sh(1,13 + j 3,8^\circ) = 1,388 / 4,68^\circ$$

$$Tgh 1,13 > 10 \cdot \tan 3,8^\circ$$

$$\varphi = 4,68^\circ$$

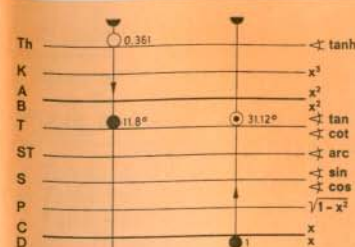


Fig. 74  $\varphi = 31,12^\circ$

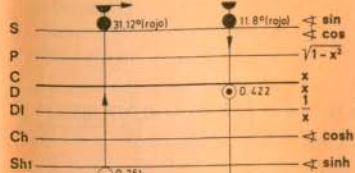


Fig. 75  $r = 0,422$

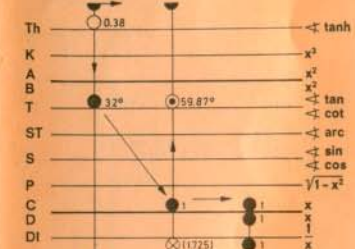


Fig. 76  $\varphi = 59,87^\circ$

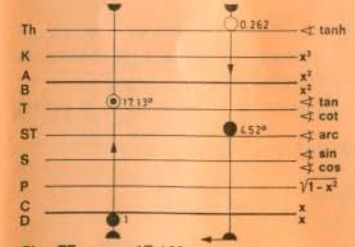


Fig. 77  $\varphi = 17,13^\circ$

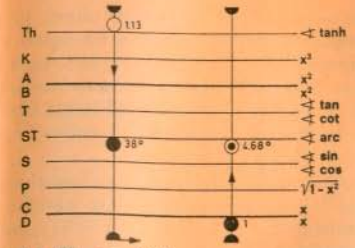


Fig. 78  $\varphi = 4,68^\circ$



5.

$$\text{Sh}(0,195 + j 51,1^\circ) = 0,8025 / 81,17^\circ$$

$$10 \cdot \text{Tgh } 0,195 > \tan 51,1^\circ$$

$$\varphi = 81,17^\circ$$

6.

$$\text{Sh}(0,274 + j 73,5^\circ) = 0,997 / 85,47^\circ$$

$$10 \cdot \text{Tgh } 0,274 < \tan 73,5^\circ$$

$$\varphi = 85,47^\circ$$

$$r = \frac{\text{Sh } 0,274}{\cos 85,47^\circ} \cdot \cos 73,5^\circ$$

$$r = 0,997$$

## 20.2 Ch (x + jy)

El cálculo del coseno hiperbólico de argumento complejo se realiza de una manera análoga.

$$\text{Ch}(x + jy) = (\text{Ch } x \cdot \cos y) + j(\text{Sh } x \cdot \sin y)$$

$$(a) \tan \varphi = \text{Tgh } x \cdot \tan y$$

$$(b) r = \frac{\text{Sh } x \cdot \sin y}{\sin \varphi}$$

$$(c) r^2 = \text{Sh}^2 x + \cos^2 y$$

La ecuación (c) ofrece de nuevo la posibilidad de calcular r sin conocer el ángulo  $\varphi$ , imaginando un triángulo rectángulo de catetos  $\text{Sh } x$  y  $\cos y$ , con hipotenusa r. Sin embargo, por regla general, se buscan ambos valores  $\varphi$  y r. Con la ecuación (a) se calcula el ángulo  $\varphi$  y con la ecuación (b) la hipotenusa r. El cálculo de r no ofrece dificultad alguna, pero la doble función tangente de la ecuación (a) exige alguna reflexión, especialmente cuando los ángulos son  $> 45^\circ$ .

Cuando estas operaciones se realizan solo de tarde en tarde, es preferible realizar los cálculos paso a paso aunque ello sea molesto. Para aquellos que la realizan con mucha frecuencia el cuadro sinóptico que sigue permite rapidez y seguridad en el cálculo de  $\text{Ch}(x + jy)$ .

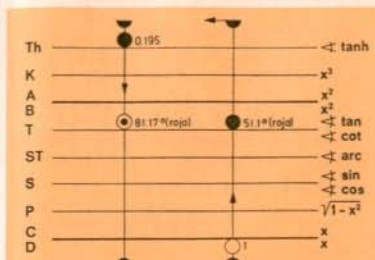


Fig. 79  $\varphi = 81,17^\circ$



Fig. 80  $\varphi = 85,47^\circ$

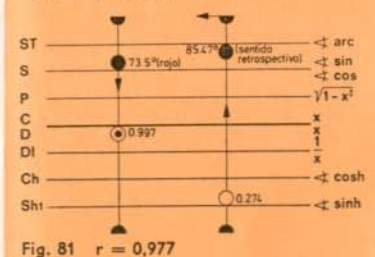


Fig. 81  $r = 0,977$

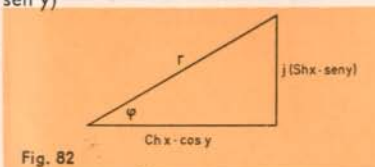


Fig. 82

y	x	1ª posición	2ª posición	lectura $\varphi$	$\varphi$
$< 45^\circ$	$0,1 < x < 3,0$	y en T sobre el principio o final de D	cursor en x de Th	en T o ST (negro)	$< 45^\circ$
La escala (T o ST) en que debe leerse el ángulo, se deduce del cálculo aproximado.					
		a) 0,1	$< \text{Tgh } x \cdot \tan y < 1$	en T	$< 45^\circ$
		b) 0,01	$< \text{Tgh } x \cdot \tan y < 0,1$	en ST	$< 5,7^\circ$
		c)	$\text{Tgh } x \cdot \tan y < 0,01$	en ST	$< 0,57^\circ$
$> 45^\circ$	$\cot y > \text{Tgh } x$	posición básica de la reglilla, cursor en y de T (rojo)	final derecho de la reglilla bajo raya del cursor	Cursor en x de Th, debajo en T (negro)	$< 45^\circ$

Colocando y en T se obtiene en C el valor de  $\cot y$

$> 45^\circ$	$\cot y < \text{Tgh } x$	y en T (rojo) debajo de x en Th	cursor sobre final de D	en T (rojo)	$> 45^\circ$
--------------	--------------------------	---------------------------------	-------------------------	-------------	--------------

Ejemplos para el cuadro anterior:

1 a.

$$\text{Ch}(0,523 + j 38,6^\circ) = 0,954 / 20,97^\circ$$

$$\text{Tgh } 0,523 \cdot \tan 38,6^\circ \approx 0,4$$

$$\varphi = 20,97^\circ$$

$$r = \frac{\text{Sh } 0,523}{\sin 20,97^\circ} \cdot \sin 38,6^\circ$$

$$r = 0,954$$

1 b.

$$\text{Ch}(0,261 + j 20,06^\circ) = 0,976 / 5,32^\circ$$

$$\text{Tgh } 0,261 \cdot \tan 20,06^\circ \approx 0,09$$

$$\varphi = 5,32^\circ$$

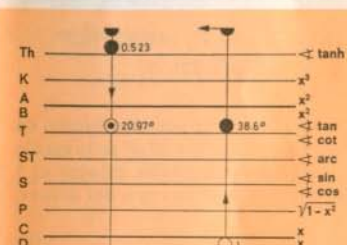


Fig. 83  $\varphi = 20,97^\circ$

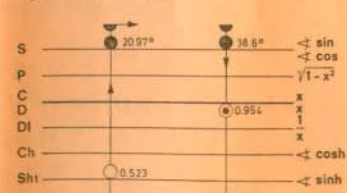


Fig. 84  $r = 0,954$

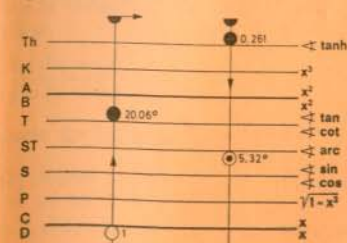


Fig. 85  $\varphi = 5,32^\circ$



$$r = \frac{\text{Sh } 0,261}{\text{sen } 5,32^\circ} \cdot \text{sen } 20,06^\circ$$

$$r = 0,976$$

1 c.

$$\text{Ch } (0,183 + j 2,31^\circ) = 1,020 / 0,417^\circ$$

$$\text{Tgh } 0,183 \cdot \tan 2,31^\circ \approx 0,008$$

$$\varphi = 0,417^\circ$$

2.

$$\text{Ch } (0,525 + j 52,4^\circ) = 0,821 / 32^\circ$$

$$\cot 52,4^\circ > \text{Tgh } 0,525$$

$$\varphi = 32^\circ$$

En la fig. 88: En la posición básica de la reglilla colocar  $\tan 52,4^\circ$  en la escala T con el cursor, después colocar el 1 de la reglilla bajo la raya del cursor.

3.

$$\text{Ch } (0,318 + j 79,5^\circ) = 0,371 / 58,92^\circ$$

$$\cot 79,5^\circ < \text{Tgh } 0,318$$

$$\varphi = 58,92^\circ$$

$$r = \frac{\text{Sh } 0,318}{\text{sen } 58,92^\circ} \cdot \text{sen } 79,5^\circ$$

$$r = 0,371$$

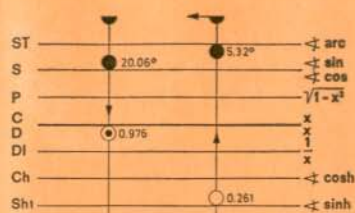


Fig. 86  $r = 0,976$

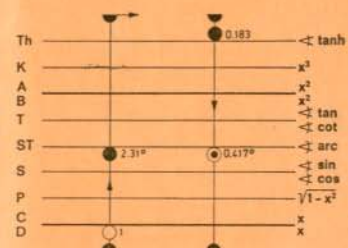


Fig. 87  $\varphi = 0,417^\circ$

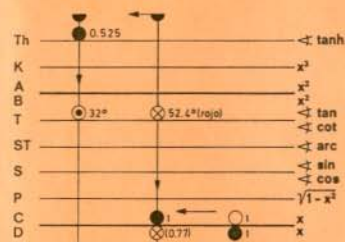


Fig. 88  $\varphi = 32^\circ$

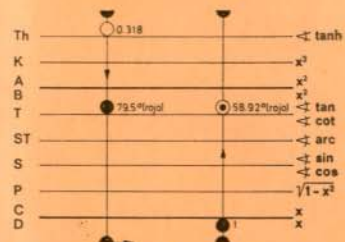


Fig. 89  $\varphi = 58,92^\circ$

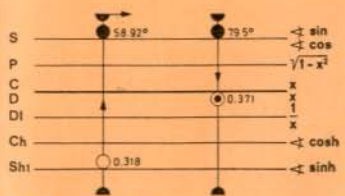


Fig. 90  $r = 0,371$

## 20.3 Tgh (x + jy)

Esta expresión puede calcularse de dos maneras:

$$(a) \quad \text{Tgh } (x \pm jy) = \frac{\text{Sh } (x \pm jy)}{\text{Ch } (x \pm jy)}$$

$$(b) \quad \text{Tgh } (x \pm jy) = \frac{\text{Tgh } x \pm j \tan y}{1 \pm j \text{Tgh } x \cdot \tan y}$$

Cual sea en cada caso la mejor solución, es cosa que cada uno debe decidir por sí mismo. Para quienes tengan seguridad en el cálculo de  $\text{Sh } (x + jy)$  y de  $\text{Ch } (x + jy)$  será preferible la fórmula (a), ya que conduce más rápidamente al final.

Ejemplo:

$$\text{Tgh } (0,25 + j 12,7^\circ)$$

$$\text{la fórmula (a) da: } \frac{0,335 / 42,62^\circ}{1,008 / 3,16^\circ} = 0,333 / 39,46^\circ$$

$$\text{la fórmula (b) da: } \frac{\text{Tgh } 0,25 + j \tan 12,7^\circ}{1 + j \text{Tgh } 0,25 \cdot \tan 12,7^\circ} = \frac{0,245 + j 0,225}{1 + j 0,245 \cdot 0,225}$$

$$= \frac{0,245 + j 0,225}{1 + j 0,0552} = \frac{0,333 / 42,62^\circ}{1,00 / 3,16^\circ} = 0,333 / 39,46^\circ$$

## 21. Las funciones trigonométricas de argumento complejo

1. Para el cálculo de  $\text{sen } (x + jy)$  se aplican las fórmulas:

$$\tan \varphi = \frac{\text{Tgh } y}{\tan x} \quad r = \frac{\text{Sh } y \cdot \cos x}{\text{sen } \varphi}$$

Ejemplo:

$$\text{sen } (0,52 + j 0,24)$$

$$\text{se obtiene } \tan \varphi = \frac{\text{Tgh } 0,24}{\tan 29,8} = 0,411; \quad \varphi = 22,4^\circ$$

$$r = \frac{\text{Sh } 0,24 \cdot \cos 29,8^\circ}{\text{sen } 22,4^\circ} = 0,552$$

2. De igual forma, para  $\text{cos } (x + jy)$  valen las fórmulas:

$$\tan \varphi = \text{Tgh } y \cdot \tan x \quad r = \frac{\text{Sh } y \cdot \text{sen } x}{\text{sen } \varphi}$$

Ejemplo:

$$\text{cos } (0,52 + j 0,24)$$

$$\text{se obtiene } \tan \varphi = \text{Tgh } 0,24 \cdot \tan 29,8^\circ = 0,135; \quad \varphi = 7,7^\circ$$

$$r = \frac{\text{Sh } 0,24 \cdot \text{sen } 29,8^\circ}{\text{sen } 7,7^\circ} = 0,899$$

3. Para el cálculo de  $\tan (x + jy)$  se aplica la fórmula (f) del cap. 20 pero los cálculos resultan más cortos con la división:

$$\tan (x + jy) = \frac{\text{sen } (x + jy)}{\text{cos } (x + jy)}$$

## 22. La inversión de los problemas de los capítulos 20 y 21

El cálculo inverso, es decir, calcular el argumento complejo  $x + jy$  es muy incómodo cuando la función hiperbólica se da en la forma polar  $r/\varphi$ . Por lo tanto los cálculos serán tratados de nuevo con detalle para las funciones hiperbólicas.



## 22.1 Arg Sh $r/\varphi = x + jy$

Para transformar la expresión polar  $r/\varphi$  en Sh ( $x + jy$ ), se descompone primero en sus componentes  $a$  y  $b$ , operación que no presenta ninguna dificultad (compárese cap. 16 y 17).

$$\text{Sh}(x + jy) = r/\varphi = r \cos \varphi + jr \sin \varphi = a + jb$$

Los valores  $x$  e  $y$  serán pues función de  $a$  y  $b$ .

Partiendo de  $\text{Sh}(x + jy) = \text{Sh } x \cdot \cos y + j \text{Ch } x \cdot \sin y = a + jb$  pueden establecerse dos ecuaciones con dos incógnitas, de donde puede hallarse el valor de  $x$  e  $y$ :

$$\begin{aligned} a^2 + (1 + b)^2 &= M^2 = (\text{Ch } x + \sin y)^2 \\ a^2 + (1 - b)^2 &= N^2 = (\text{Ch } x - \sin y)^2 \\ 2 \text{Ch } x &= M + N \\ 2 \sin y &= M - N \end{aligned}$$

y se empieza el cálculo por  $\sin y = \frac{M - N}{2}$ . A continuación para encontrar el

valor de  $x$  valen las ecuaciones  $\text{Sh } x = \frac{a}{\cos y}$  o  $\text{Ch } x = \frac{M + N}{2}$ .

Según las ecuaciones anteriores los valores de  $M$  y  $N$  pueden ser representados como hipotenusas de triángulos rectángulos cuyos catetos son  $a$  y  $(1 + b)$  o bien  $a$  y  $(1 - b)$ .

El cálculo de la hipotenusa resulta fácil si se siguen las reglas dadas para los cap. 13.2 y 16. El ángulo que aparece allí no tiene ahora ningún interés.

Ejemplo:

$\text{Sh}(x + jy) = 0,422 / 31,12^\circ$  buscad  $x$  e  $y$ .

$$0,422 / 31,12^\circ = a + jb = 0,361 + j 0,218$$

Triángulo con  $a = 0,361$  y  $1 + b = 1,218$  nos da  $M = 1,270$

Triángulo con  $a = 0,361$  y  $1 - b = 0,782$  nos da  $N = 0,861$

$$M - N = 0,409$$

$$\frac{1}{2}(M - N) = 0,2045 = \sin y \quad y = 11,8^\circ$$

$$M + N = 2,131 = 2 \text{Ch } x$$

$$\text{Ch } x = 1,0655 \quad x = 0,360$$

Debajo de 1,0655 en la escala D está  $x = 0,360$  en Ch. Por encima de 1,0655 en la escala H1 está  $x = 0,360$  en Sh1.

## 22.2 Arg Ch $r/\varphi = x + jy$

El proceso de cálculo es el mismo que en el ejemplo anterior, solo que las fórmulas para los cosenos hiperbólicos son ahora:

$$M^2 = (1 + a)^2 + b^2 \quad \cos y = \frac{1}{2}(M - N)$$

$$N^2 = (1 - a)^2 + b^2 \quad \text{Sh } x = \frac{b}{\sin y}$$

Ejemplo:

$\text{Ch}(x + jy) = 0,954 / 20,97^\circ$  (compárese con el ejemplo 1 de la pag. 45).

$$a + jb = 0,892 + j 0,3413$$

Triángulo con  $1 + a = 1,892$  y  $b = 0,3413$  nos da  $M = 1,922$

Triángulo con  $1 - a = 0,108$  y  $b = 0,3413$  nos da  $N = 0,358$

$$M - N = 1,564$$

$$\frac{1}{2}(M - N) = 0,782 = \cos y$$

$$y = 38,6^\circ$$

$$\text{Sh } x = \frac{0,3413}{\sin 38,6^\circ}$$

$$x = 0,523$$

$$0,954 / 20,97^\circ = \text{Ch}(0,523 + j 38,6^\circ)$$

## 22.3 Arg Tgh $r/\varphi = x + jy$

Para calcular el valor de  $x$  e  $y$  hay de nuevo dos ecuaciones:

$$\text{Tgh } 2x = \frac{2r \cos \varphi}{1 + r^2} = \frac{2 \cos \varphi}{1/r + r}$$

$$\tan 2y = \frac{2r \sin \varphi}{1 - r^2} = \frac{2 \sin \varphi}{1/r - r}$$

Ejemplo:  $0,333 / 39,46^\circ = \text{Tgh}(x + jy)$  (compárese cap. 20.3)

$$\text{Tgh } 2x = \frac{2 \cdot \cos 39,46^\circ}{3,004 + 0,333}; \quad 2x = 0,500 \quad x = 0,25$$

$$\tan 2y = \frac{2 \cdot \sin 39,46^\circ}{3,004 - 0,333}; \quad 2y = 25,5^\circ \quad y = 12,7^\circ$$

$$0,333 / 39,46^\circ = \text{Tgh}(0,25 + j 12,7^\circ)$$

El cálculo de los quebrados y la lectura de los valores  $2x$  en la escala Th y el  $2y$  en la T no ofrecen dificultad alguna, teniendo en cuenta las indicaciones de los capítulos 14.2, 19.3. Para el cálculo de  $1/r$  se hará uso de las escalas D y DI o de las exponenciales  $e^{+x}$  y  $e^{-x}$  según, sea más conveniente, como escalas recíprocas.

## 22.4 arc sen $r/\varphi = x + jy$

El método del cálculo es el mismo que en cap. 22.1, solo que las fórmulas están modificadas para el seno trigonométrico.

$$M^2 = (a + 1)^2 + b^2 \quad \sin x = \frac{M - N}{2}$$

$$N^2 = (a - 1)^2 + b^2 \quad \text{Sh } y = \frac{b}{\cos x}$$

Ejemplo:  $0,552 / 22,4^\circ = \sin(x + jy)$  compárese cap. 21 ejemplo 1

se obtiene  $0,552 / 22,4^\circ = 0,51 + j 0,21$

$$M^2 = 1,51^2 + 0,21^2; \quad M = 1,524$$

$$N^2 = 0,49^2 + 0,21^2; \quad N = 0,532$$

$$\sin x = \frac{1,524 - 0,532}{2} = 0,496; \quad x = 0,52$$

$$\text{Sh } y = \frac{0,21}{\cos 29,8^\circ} = 0,242; \quad y = 0,24$$

## 22.5 arc cos $r/\varphi = x + jy$

Aquí son las fórmulas

$$M^2 = (a + 1)^2 + b^2 \quad \cos x = \frac{M - N}{2}$$

$$N^2 = (a - 1)^2 + b^2 \quad \text{Sh } y = \frac{b}{\sin x}$$



Ejemplo:  $0,899 / 7,7^\circ = \cos(x + jy)$  compárese cap. 21 ejemplo 2

se obtiene  $0,899 / 7,7^\circ = 0,891 + j 0,1205$

$$M^2 = 1,891^2 + 0,1205^2; \quad M = 1,985$$

$$N^2 = 0,109^2 + 0,1205^2; \quad N = 0,162$$

$$\cos x = \frac{1,985 - 0,162}{2} = 0,867; \quad x = 0,52$$

$$\text{Sh } y = \frac{0,1205}{29,8^\circ} = 0,242; \quad y = 0,24$$

## 22.6 arc tan $r/\varphi = x + jy$

Aquí son las fórmulas

$$\tan 2x = \frac{2r \cos \varphi}{1 - r^2} = \frac{2 \cos \varphi}{1/r - r}$$

$$\text{Tgh } 2y = \frac{2r \sin \varphi}{1 + r^2} = \frac{2 \sin \varphi}{1/r + r}$$

## 23. Ejemplos de aplicación

A continuación se muestran las ventajas de las reglas de cálculo ARISTO-HyperboLog y ARISTO-HyperLog mediante algunos ejemplos típicos tomados de la electrotécnica. Dado que existe mucha discrepancia en los símbolos empleados por la electrotécnica en sus fórmulas, empezaremos dando una lista de los que usaremos aquí:

Significado correspondiente al tratamiento vectorial de las redes de cuatro terminales (cuadripolos):

$\mathcal{Z}_0$ impedancia imagen o aparente	$\alpha$ atenuación
$\mathcal{Z}_0$ impedancia característica	$b$ defasado
$\mathcal{Z}_1$ impedancia a circuito abierto	$p$ coeficiente de reflexión
$\mathcal{Z}_k$ impedancia en cortocircuito	$\alpha$ constante de atenuación
$g = a - jb$ función propagación	$\beta$ constante de fase

En la teoría de las líneas de transmisión se usa además de los anteriores:

$$\gamma = \frac{g}{l} = \alpha + j\beta = \frac{a}{l} + j \frac{b}{l} = \text{constante de propagación.}$$

### Conexión de una red atenuadora

Entre una fuente (o emisor) y una carga (o receptor), ambos de impedancia igual a  $60 \Omega$ , debe conectarse una red atenuadora con una atenuación de 1,5 nepers. Calcular las resistencias serie  $r_1$  y la resistencia paralelo  $r_2$ , supuesto que se adopta la configuración en T.

Se aplican las siguientes fórmulas de cuadripolos:

$$(1) \mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2 \text{ Ch } g + \mathcal{Z}_0 \mathcal{Z}_2 \text{ Sh } g$$

$$(2) \mathcal{Z}_0 \cdot \mathcal{Z}_1 = \mathcal{U}_2 \text{ Sh } g + \mathcal{Z}_0 \mathcal{Z}_3 \text{ Ch } g$$

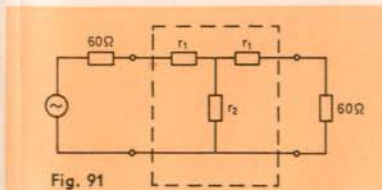


Fig. 91

Por el enunciado del problema se sabe que la función propagación debe ser  $g = a + jb = 1,5 + j0$ . Para el trabajo en vacío (salida en circuito abierto) se obtiene, a partir de la igualdad (1) la relación de transferencia de voltaje.

$$(3) \frac{\mathcal{U}_1}{\mathcal{U}_2} = \text{Ch } g = \text{Ch } 1,5 = 2,352$$

A continuación, por división de las igualdades (1) y (2), se calcula la impedancia de entrada  $\mathcal{Z}_1$  para trabajo en vacío.

$$\frac{\mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_0} \text{ Ctgh } g = \text{Ctgh } 1,5 = 1,105$$

Llevando el cursor de la regla de cálculo al valor 1,5 de la escala Th, se lee el resultado 1,105 en la escala DI, debajo mismo.

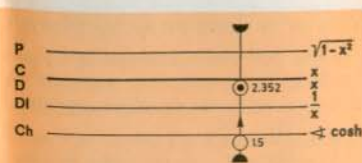


Fig. 92

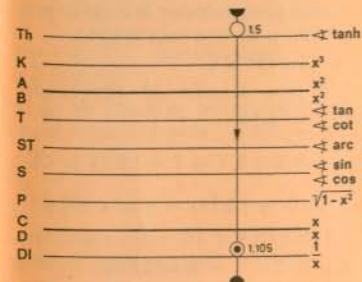


Fig. 93

La relación de transferencia de voltaje puede también calcularse a partir del esquema de la red en T:

$$\frac{\mathcal{U}_1}{\mathcal{U}_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_2} = 2,352; \quad \text{ver ecuación (3)}$$

De  $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_0 \cdot \text{Ctgh } g = 60 \cdot 1,105 = 66,3 \Omega$  y  $\mathcal{Z}_1 = r_1 + r_2 = 66,3 \Omega$ , se deduce:

$$r_2 = \frac{66,3}{2,352} = 28,2 \Omega \quad r_1 = 66,3 - 28,2 = 38,1 \Omega$$

Calcular la impedancia a circuito abierto y la impedancia en cortocircuito de una línea de transmisión de cobre, de  $0,2 \text{ } \varnothing$  y 10 km de longitud.

Los datos para la misma son:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 &= Z_0 / \varphi = 670 \Omega / -41,6^\circ \\ a &= 0,814 \text{ nepers (atenuación)} \\ b &= 0,843 \text{ radianes} = 48,3^\circ \text{ (defasado)} \\ g &= a + jb = 0,814 + j 48,3^\circ \text{ (función propagación)} \end{aligned}$$

Cálculo de la impedancia a circuito abierto:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1 &= \mathcal{Z}_0 \cdot \text{Ctgh } g \\ \mathcal{Z}_1 &= 670 / -41,6^\circ \cdot \text{Ctgh } (0,814 + j 48,3^\circ) \\ &= 670 / -41,6^\circ \cdot \frac{\text{Ch } (0,814 + j 48,3^\circ)}{\text{Sh } (0,814 + j 48,3^\circ)} \\ &= 670 / -41,6^\circ \cdot \frac{1,125 / 37^\circ}{1,173 / 59,1^\circ} = 642 / -63,7^\circ \\ \mathcal{Z}_1 &= (284,2 - j 575) \Omega \end{aligned}$$

Cálculo de la impedancia en cortocircuito:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_k &= 670 / -41,6^\circ \cdot \text{Tgh } (0,814 + j 48,3^\circ) \\ &= 670 / -41,6^\circ \cdot \frac{1,173 / 59,1^\circ}{1,125 / 37^\circ} = 699 / -19,5^\circ \\ \mathcal{Z}_k &= (659 - j 233) \Omega \end{aligned}$$



### Calcular la relación de transferencia de voltaje de un filtro pasa-bajos

formado por seis secciones en T, todas iguales con resistencias en serie de  $R = 10 \text{ k}\Omega$  y capacidad en paralelo de  $C = 1 \mu\text{F}$ , para la frecuencia de 50 c/s. Para un cuadripolo simétrico, la relación de transferencia de voltaje es siempre

$$\text{igual a } \frac{U_1}{U_2} = Ch \text{ g}$$

En primer lugar vamos a utilizar esta igualdad para calcular la función propagación  $g$  de una sola sección.

Para  $R = 10^4 \Omega$  e

$$Y = \omega \cdot C = 2\pi \cdot 50 \cdot 10^{-6} \text{ resulta}$$

$$R \cdot Y = 3,14$$

$$\frac{U_1}{U_2} = 1 + j R Y = 1 + j 3,14 = Ch \text{ g}$$

$$\text{Arg } Ch (1 + j 3,14) = g = x + j y$$

$$1 + j 3,14 = a + j b$$

$$1 + a = 2 \quad b = 3,142 \quad M = 3,725 \quad \text{ver cap. 22.2}$$

$$1 - a = 0 \quad b = 3,142 \quad N = 3,142$$

$$(M - N) = 0,583$$

$$\cos y = 1/2 (M - N) = 0,2915 \quad y = 73,05^\circ$$

$$\text{Sh } x = \frac{b}{\text{sen } y} = \frac{3,142}{\text{sen } 73,05^\circ} = 3,285 \quad x = 1,905$$

$$g = 1,905 + j 73,05^\circ$$

Sumando ahora las funciones de propagación de las seis secciones, encontra remos

$$6 g = 11,43 + j 438,3^\circ = 11,43 + j 78,3^\circ$$

La salida después de las 6 secciones es  $U_1$  y la relación buscada:

$$\frac{U_1}{U_2} = Ch 6 g = Ch (11,43 + j 78,3^\circ) = r / \varphi$$

$$\tan \varphi = \text{Tgh } x \cdot \tan y$$

$$= 1 \cdot \tan y$$

$$\varphi = y = 78,3^\circ$$

$$r = \text{Sh } x \cdot \frac{\text{sen } y}{\text{sen } \varphi} = \text{Sh } x \cdot 1$$

$$r = \text{Sh } 11,43 \approx \frac{1}{2} e^{11,43} = 1/2 (e^{5,715})^2 = \frac{1}{2} 305^2 = 4,66 \cdot 10^4$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{46600}{78,3^\circ}$$

### Medida de la impedancia de entrada de una antena emisora o receptora.

A unos alambres de Lecher de una impedancia característica de  $60 \Omega$  se conecta un cable o línea de transmisión de impedancia característica  $Z_0 = 60 \Omega$ . La antena, que se conectará al otro extremo, tiene una impedancia aparente cuyo valor  $y$  fase en función de la frecuencia se desea medir (aquí solo se realizará el cálculo correspondiente a un punto o frecuencia). Sea esta frecuencia 100 Mc/s que corresponde a una longitud de onda de 3 m.

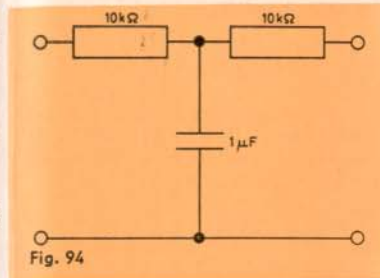


Fig. 94

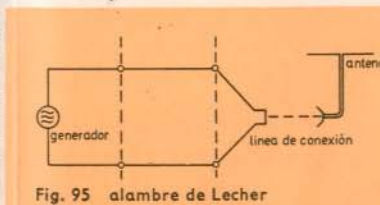


Fig. 95 alambre de Lecher

Para eliminar la influencia de la línea de conexión en la medida, se colocan primeramente unas pinzas de cortocircuito al final de la línea de conexión (o sea a la entrada de la antena u objeto de medición) y se determina la situación  $I_1$  del mínimo de voltaje, a partir del final de los alambres de Lecher, midiendo también el valor del mínimo y máximo de voltaje. Esto da  $U_{\min} : U_{\max} = m_1$ . Finalmente se quita el cortocircuito de antes y se conecta la línea a la antena, procediendo a la segunda medida. En ella se obtienen los correspondientes valores  $I_2$  y  $m_2$ .

Los resultados de la medición son, pues:

$$I_1 = 40 \text{ cm} \quad m_1 = 0,15 \quad (\text{cortocircuito})$$

$$I_2 = 70 \text{ cm} \quad m_2 = 0,70$$

Las ecuaciones fundamentales de la teoría de las líneas de transmisión dan el coeficiente de reflexión en función de la impedancia aparente  $Z$  (aquí la incógnita) y la impedancia característica  $Z_0$ .

$$p = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} = p / \varphi$$

La impedancia que se mediría a una determinada distancia  $x$  del final de la línea sin pérdidas, separando la parte del conductor que queda a la izquierda, sería:

$$\frac{Z_x}{Z_0} = \frac{U_x}{Z_0 U_x} = \frac{e^{j\beta x} + p \cdot e^{-j\beta x}}{e^{j\beta x} - p \cdot e^{-j\beta x}}$$

En el mínimo de voltaje  $p \cdot e^{-j\beta x}$  está exactamente  $180^\circ$  fuera de fase respecto  $e^{j\beta x}$ , de manera que en este caso particular puede escribirse:

$$\frac{Z_{x \min}}{Z_0} = \frac{1 + p / 180^\circ}{1 - p / 180^\circ} = \frac{1 - p}{1 + p}$$

Por otra parte, dado que el mínimo de voltaje corresponde a una diferencia de voltajes y el máximo a una suma, se comprende que la relación de voltajes será:

$$m = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{1 - p}{1 + p}$$

Esta relación de voltajes es, técnicamente, de muy fácil determinación y con ella se pasa a  $Z_{x \min}$  que sirve de base para lo que sigue. El cálculo numérico se aligera apreciablemente, cuando se considera la impedancia aparente  $Z$  como la de una línea con pérdidas cortocircuitada al final. Entonces se aplica:

$$(1) \quad \frac{Z}{Z_0} = \text{Tgh} (a + j b)$$

Donde  $g = a + j b$  es la función propagación de esta imaginaria línea de transmisión, que debe tener, naturalmente, la impedancia característica  $Z_0$ . Para la línea de conexión antes dicha, con la misma impedancia característica  $Z_0$  y para el trozo de alambre de Lecher hasta el mínimo, se pueden sumar las funciones propagación. Para todo el trozo desde  $x_{\min}$  hasta el final, se puede poner:

$$(2) \quad \frac{Z_{x \min}}{Z_0} = \text{Tgh} (a + j b + a' + j b' + j b'')$$

Donde  $a' + j b'$  es la función propagación de la línea de conexión y  $j b''$  la función propagación del trozo de alambres de Lecher hasta el mínimo, ya que se los puede considerar sin pérdidas. En el mínimo de voltaje se puede aplicar simplemente la ley de Ohm. Este hecho facilita el cálculo de las funciones propagación.

$$(3) \quad m_1 = \text{Tgh} (a' + j b' + j b'') = 0,15$$

$$(4) \quad m_2 = \text{Tgh} (a + j b + a' + j b' + j b'') = 0,70$$



Para abreviar la escritura, pondremos:

$$a' + jb' + jb'' = g_1 \quad b_2'' - b_1'' = \delta$$

Con estos símbolos, las igualdades anteriores se convierten en:

$$(3') \quad m_1 = \text{Tgh } g_1 = 0,15$$

$$(4') \quad m_2 = \text{Tgh } (g + a + jb + j\delta) = 0,70$$

el valor de  $g_1$  puede leerse como número real en la escala Th de la regla de cálculo, poniendo el cursor en  $m = 0,15$  de la escala D.  $g_1 = 0,1512$

De manera parecida obtendremos:

$$g_1 + a + jb + j\delta = 0,867$$

$$a + jb + j\delta = 0,867 - 0,1512 = 0,7158$$

De donde se deduce que  $a = 0,716$  y  $b = -\delta$ . El valor de  $\delta$  se obtiene del desplazamiento del punto mínimo de la primera a la segunda medición. La constante de propagación  $\gamma$  de una línea de transmisión sin pérdidas es un ángulo puro, ya que no existe atenuación. Por tanto  $\gamma = j \cdot \beta$  a la función propagación para la distancia entre los dos mínimos será  $j\delta = j\beta (l_2 - l_1)$ . Y con la fórmula de aplicación general  $\beta \cdot \lambda = 2\pi$ , se obtiene:

$$j\delta = j \cdot 2\pi \frac{l_2 - l_1}{\lambda} = j \cdot 2\pi \frac{70 - 40}{300}$$

$$j\delta = j \cdot 2\pi \cdot 0,1$$

o en grados

$$j\delta = j \cdot 360^\circ \cdot 0,1 = j \cdot 36^\circ$$

Con esto se ha llegado ya a la expresión total  $g_1 = a + jb = 0,716 - j \cdot 36^\circ$ .

Queda todavía para hallar el valor de  $\beta$  a partir de la ecuación (1):

$$\frac{\beta}{30} = \text{Tgh } (a + jb) = \text{Tgh } (0,716 - j \cdot 36^\circ)$$

Para calcular esta expresión remitimos al cap. 20.3.

$$\frac{\beta}{30} = \text{Tgh } (0,716 - j \cdot 36^\circ) = \frac{0,977/-49,8^\circ}{1,125/-24,05^\circ} = 0,868/-25,8^\circ$$

Con ello la impedancia aparente buscada será

$$\beta = 60 \cdot 0,868/-25,8^\circ = 52,1/-25,8^\circ = (47 - j \cdot 22,6) \Omega$$

## 24. El cursor y sus marcas

### 24.1 La marca 36

En la parte superior derecha del anverso del cursor (fig. 96) existe una raya corta que indica el valor 36 en las escalas CF/DF, cuando la raya central del cursor se encuentra sobre el extremo inicial de las escalas C/D. De esta forma resulta una multiplicación por 36, cuando se pasa de C/D a CF/DF; por lo tanto resulta una cómoda conversión para:

$$1 \text{ hora} = 3600 \text{ segundos}$$

$$1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$$

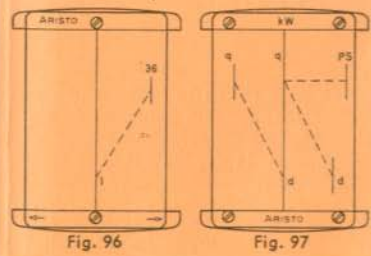
$$1^\circ = 3600''$$

$$100\% = 360^\circ$$

$$1 \text{ año} = 360 \text{ días}$$

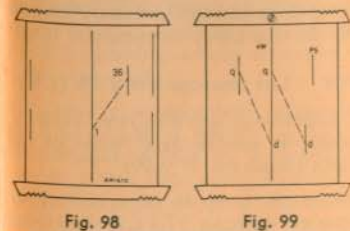
$$1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ julios}$$

$$\kappa_{Al} = 36 \frac{\text{m}}{\Omega \text{ mm}^2} \text{ (conductividad)}$$



### 24.2 Las marcas $2\pi$

Además de la marca 36, se encuentran en el anverso del cursor L0972 (fig. 98) en el borde izquierdo y derecho del cursor y sobre las escalas C/D y CF/DF las marcas  $2\pi$ . Están interrumpidas en la parte central, para evitar confusiones con la raya principal del cursor. Las marcas  $2\pi$  se necesitan principalmente para el cálculo de oscilaciones.

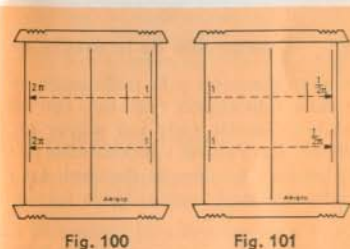


Con la marca  $2\pi$  se multiplica, colocando la marca  $2\pi$  de la derecha sobre el factor y leyendo el resultado debajo de la marca  $2\pi$  de la izquierda. Mediante el proceso inverso se lleva a cabo la división.

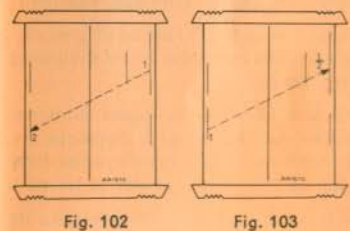
Ejemplo 1: Determinése la frecuencia  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  de un oscilador de la frecuencia circular  $\omega = 372 \text{ Hz}$ . El cursor se coloca con la marca  $2\pi$  izquierda sobre 3-7-2 de la escala D, leyéndose el resultado  $f = 59,2 \text{ Hz}$  debajo de la marca  $2\pi$  derecha sobre la escala D.

Ejemplo 2: Determinése la resistencia inductiva  $X_L = 2\pi fL$  de una bobina, siendo la frecuencia  $f = 59,2 \text{ Hz}$  y la inductividad  $L = 21,5 \text{ mH}$ .

El 1 de la escala CF se coloca debajo de 5-9-2 de DF. A continuación se colocará la marca  $2\pi$  derecha sobre 2-1-5 de CF para leer el resultado 8 debajo de la marca  $2\pi$  izquierda en la escala DF.



En combinación con las marcas  $2\pi$  del cursor y las escalas C/D o CF/DF respectivamente pueden llevarse a cabo multiplicaciones y divisiones por 2 sin necesidad de graduar la reglilla. Una multiplicación por 2 se lleva a cabo, colocando la marca  $2\pi$  superior derecha sobre el factor en DF. Sobre D y debajo de la marca  $2\pi$  izquierda puede leerse el resultado. Siguiendo el proceso inverso se divide por 2.



### 24.3 Superficies circulares, pesos de barras de acero

En el reverso del cursor (fig. 97 y 99), la distancia desde la raya central hasta las rayas cortas de la parte superior izquierda e inferior derecha, es igual al factor  $\pi/4 = 0,785$  (referido a la escala de cuadrados) y sirve para calcular el área del círculo según la fórmula  $q = d^2 \cdot \pi/4$ . Si la raya central del cursor se encuentra sobre el diámetro  $d$  en la escala D, puede leerse la superficie en la parte superior izquierda sobre la escala A.

La misma relación existe también entre la raya inferior derecha y la central. Como sea que la distancia entre estas rayas corresponde también al peso específico 7,85 del acero dulce, puede leerse — a continuación de la lectura de la superficie en la raya central — el peso de barras de acero dulce por unidad



de longitud en la raya izquierda. Llevando finalmente el extremo inicial de la escala B de la reglilla debajo de esta raya, se obtiene moviendo el cursor, el peso de una barra de cualquier longitud.

#### 24.4 Las marcas kW y PS (CV)

La separación entre la raya central y la marca superior derecha, da en las escalas de cuadrados el factor de conversión de kW en PS (CV) y recíprocamente (véase fig. 97 y 99).

Colocando p. ej. la raya central sobre 20 kW, entonces indicará la marca superior derecha 27,2 CV. Recíprocamente, la graduación de 7 CV con la marca derecha da en la raya central 5,15 kW.

Para conversiones en el sistema inglés existe un cursor especial con la marca HP. Este cursor se puede obtener bajo el número de pedido

L 0970 E para la ARISTO-MultiLog

L 0971 E para la ARISTO-HyperBoLog

y L 0972 E para la ARISTO-HyperLog.

### 25. Escala de números normales 1364

#### 25.1 Disposición de la escala de números normales

La normalización y la tipificación se han convertido en factores importantes de toda fabricación racional, con ello alcanzan los números normales (NZ) una importancia cada vez mayor en la técnica. Los números normales según DIN 323 son valores seleccionados de una serie geométrica, que están adaptados al sistema de números decimal. La relación se ve claramente observando la subdivisión logarítmica D y la escala de mantisas L correspondiente.

Frente a los valores uniformemente escalonados de las mantisas de la escala L se encuentran en la escala D los números correspondientes. Los números normales son, según DIN 323, valores redondeados de estos números.

De las escala L y D resulta una escala NZ, si se suprime la escala D y se colocan los números normales en las divisiones correspondientes de la escala de mantisas simplificada.

Frente a las diez divisiones numeradas de la escala de mantisas superior se encuentran los números normales de la serie R 10. La subdivisión de la escala de mantisas en 20 partes iguales lleva a los números normales de la serie R 20 y con 40 intervalos iguales se forma la serie R 40.

Junto a la graduación milimétrica de la regla están marcados adicionalmente los valores NZ de la forma siguiente: R 10 con puntas de flecha, R 20 con rayas y R 40 con puntos. De esta forma pueden llevarse valores NZ a planos o dibujos.

#### 25.2 Finalidad de la escala NZ

Como primera aplicación se tendrá en la escala NZ una ayuda para la memoria, de forma que siempre se tienen a mano los valores NZ más usuales. Además son prácticas para la construcción de cuadrículas o redes logarítmicas simples y dobles en papel cuadriculado normal para interpretaciones normográficas. Como de la multiplicación o división de números normales resulta siempre otro número normal se tendrá un cuadro tabular de números normales como tabla gráfica de cálculo.

La combinación de números normales y mantisas en una escala tiene la ventaja de que simplifican enormemente los cálculos de estimación logarítmicos, ya que frente a los números normales se encuentran en la escala de mantisas

logaritmos sencillos, que se suman o restan fácilmente de memoria. Añadiendo las características (como en el cálculo con la tabla de logaritmos) se obtiene un resultado exacto en cuanto a la posición de la coma y que tiene como mucho un error del 3%, si se incluye en el cálculo la serie R 40.

En muchos casos puede usarse también la escala NZ, si se redondea fuertemente, tomando p. ej. para  $\pi$  el valor 3,15 o para  $\gamma = 7,85$  el valor  $\gamma = 8$ . Las mantisas correspondientes a los números normales se leen en la escala de mantisas que se encuentra sobre los números normales. Debe prestarse especial atención a la característica, ya que de ella depende principalmente la exactitud del cálculo.

En fórmulas más complicadas es conveniente apuntar los logaritmos al hacer su lectura para poder repasar la adición. Números naturales menores que 1 (p. ej. 0,8) suelen expresarse mejor mediante logaritmos negativos p. ej.

$\lg 0,8 = -0,1$  en vez de  $\lg 0,8 = 0,9 - 1$ .

Las escalas L y D permiten un cálculo logarítmico más exacto ya que representan una tabla logarítmica de tres cifras.

#### 25.3 Reglas graduadas logarítmicas

Para representar escalas logarítmicas o cuadros, se encuentran en la regla NZ escalas logarítmicas con longitudes de base de 200 mm, 150 mm, 100 mm, 50 mm, y 25 mm. Las longitudes 125 mm y 250 mm pueden sacarse de la regla de cálculo.

#### 25.4 Factores de conversión para unidades no métricas

En el estudio de libros técnicos ingleses y americanos presentan dificultades las unidades métricas porque hay que buscar los factores de conversión. Este trabajo lo ahorran en gran parte las tablas de la regla NZ, ya que contiene los principales factores de conversión. Como base sirvió el libro R. Stille, «Messen und Rechnen in der Physik», ed. Vieweg & Sohn.

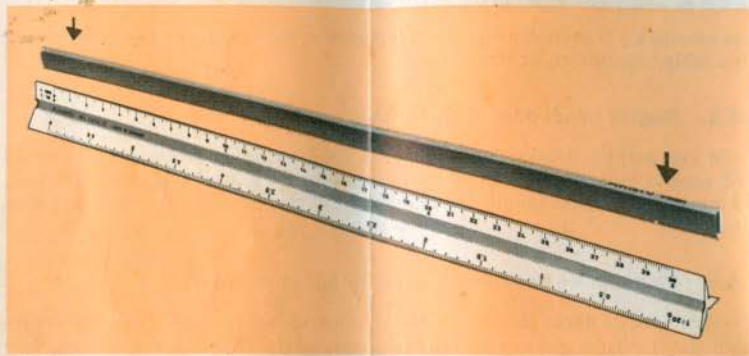


# ARISTO

## Escalímetros triangulares ARISTO con asidero

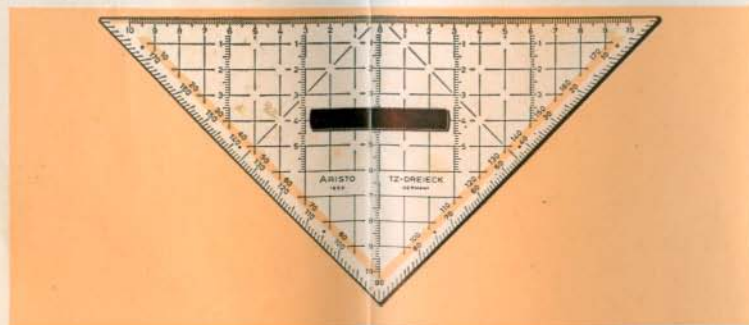
Hasta ahora y a pesar de todas sus ventajas las escales triangulares presentaban una desventaja. Cuando se usaban se perdía mucho tiempo girando y dando vueltas hasta encontrar la división deseada. ARISTO ha resuelto este problema con éxito.

Sin sobreprecio alguno los escalímetros triangulares ARISTO reciben un asidero continuo, plegable y de dos colores, que con un solo vistazo permite reconocer la división deseada. La suave curvatura del borde superior del asidero, quita también el filo a la faceta superior cuya esquina se clava desagradablemente en la palma de la mano al trabajar.



## Escuadra-TZ-ARISTO

Esta práctica escuadra para el dibujo, con sus inagotables posibilidades de aplicación se fabrica de ARISTOPAL irrompible, de estabilidad dimensional y transparente. Las divisiones en milímetros paralelas a la hipotenusa y la red de cuadraditos de 1 cm facilitan el rayado, el trazado de paralelas, figuras simétricas, ángulos rector, así como el llevar y leer coordenadas rectangulares. La división de ángulos es suministrable en  $360^\circ$  ó  $400^\circ$ .



## PROGRAMA DE PRODUCCION ARISTO

Reglas de cálculo · Reglas de cálculo circulares · Escalímetros  
Instrumentos para dibujo · Planímetros · Instrumentos para el grabado por capas  
Coordinatógrafos con mando manual y numérico

**ARISTO-WERKE · DENNERT & PAPE KG**  
**2 HAMBURG 50 · ALEMANIA**

## INSTRUCCIONES PARA EL USO DE LA REGLA DE CALCULO

# ARISTO

**MULTILOG  
HYPERBOLOG  
HYPERLOG**

870 · 0970 · 01070  
0971 · 0972

Escala de números normales 1364

